# Breves notas sobre la teoría de cociclos

Jordi-Lluís Figueras Romero

19 de febrero de 2009

## Índice



## 1. Introducción

Ésta es una breve recopilación de nociones muy básicas sobre la teoría de cociclos. Aquí no se pretende profundizar en la exposición. Por lo tanto, si cualquier lector quisiera entrar con profundidad debería consultar cualquiera de las referencias expuestas en la bibliografía, en particular en [HdLL], un gran libro, aún en proceso de revisión.

## 2. Una motivación para el estudio de cociclos

Sean $M$ una variedad diferencial y $f\colon M \to M$ un difeomorfismo sobre ella. Sea $V \subset M$ una subvariedad compacta e invariante por $f$, es decir, $f(V) = V$. Una pregunta natural que nos podemos hacer es:

*¿Cómo es la dinámica de los puntos cercanos a $V$?*

Una forma de responder esta pregunta es estudiar la dinámica de la aplicación diferencial. Si denotamos por $T_V M$ el fibrado tangente de $M$ con base restringida en $V$ tenemos que la aplicación que queremos estudiar es:

$$\begin{array}{rccc} Df\colon & T_V M & \to & T_V M \\ & (p, v) & \to & (f(p), Df_p v) \end{array} \tag{1}$$

*Ejercicio* 2.1. Demuestra que $T_V V$, el cual se puede incluir de forma natural en $T_V M$, es invariante bajo la acción de la aplicación diferencial, es decir, $Df(T_V V) \subset T_V V$. ¿Es cierto que $Df(T_V V) = T_V V$ ?

Es bien sabido que el estudio de la aplicación (1) no puede responder siempre la totalidad de la pregunta que nos hemos formulado pero si que nos puede dar mucha información de la dinámica que podemos esperar de los puntos cercanos a la variedad $V$.

**Ejemplo 2.2.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo del plano tal que el origen es un punto fijo. Si queremos estudiar la dinámica alrededor de éste debemos estudiar la matriz $A = Df_0$. Si la matriz es hiperbólica entonces la dinámica alrededor del origen queda muy bien descrita por $A$ (¡existe una conjugación de dinámicas!) pero si la matriz tiene valores propios con módulo igual a 1 podemos no tener tal conjugación.

Una categoría de variedades invariantes muy importante es la siguiente:

**Definición 2.3.** Diremos que $V$ es una *variedad normalmente hiperbólica (NHIM)* si $T_V M$ se puede descomponer en suma directa de la forma $T_V V \oplus N^s V \oplus N^u V$ tales que cada uno de los sumandos es $Df$ invariante y si existen constantes $K > 0$ y $0 < \lambda < 1$ para que se cumpla:

1. $||Df_p^n|N^s V|| \leq K\lambda^n$.
2. $||Df_p^{-n}v|N^u V|| \leq K\lambda^n$.
3. $||Df_p^n|N^s V|| \cdot ||Df_{f^n(p)}^{-n}|T_{f^n(p)}V|| \leq K\lambda^n$.
4. $||Df_p^{-n}v|N^u V|| \cdot ||Df_{f^{-n}(p)}^{n}|T_{f^{-n}(p)}V|| \leq K\lambda^n$.

para todo $p \in V$ y para $n \in \mathbb{N}$.

*Observación* 2.4. Fijémonos que estas variedades estan caracterizadas por el comportamiento de $Df$.

*Observación* 2.5. Las NHIM tienen la hermosa propiedad de que tienen variedades invariantes estable e inestable tangentes a ella. Los fibrados $N^s V$ y $N^u V$ son la linealización de éstas.

Existen diversos resultados sobre NHIM pero uno de los más importantes es su estabilidad estructural, es decir

**Teorema 2.6.** *Una variedad compacta $V \in M$ es NHIM bajo $f$ si, y solo si, existe un $\varepsilon > 0$ tal que, por cualquier difeomorfismo $g$ tal que $d(g, f) < \varepsilon$ existe una variedad invariante $V_g$ por $g$ con $d(V_g, V) \to 0$ cuando $g \to f$.*

*Observación* 2.7. Este teorema nos dice que si tenemos una variedad invariante compacta $V$ y queremos saber si persistirá bajo perturbaciones, solo tenemos que comprovar que sea NHIM.

Llegados a este punto vemos que el estudio de aplicaciones del tipo (1) parece interesante y podemos desprendernos de ciertas imposiciones dinámicas que hicimos al principio de la sección. Si hacemos esto llegamos a la definición de cociclo.

**Definición 2.8** (Cociclos generales)**.** Sea $E$ un fibrado vectorial. Un *cociclo* no es más que un morfismo de fibrados vectoriales $f \colon E \to E$.

Esta definición es demasiado amplia para poder hacer un estudio en profundidad. Nos aleja demasiado de la introducción que hicimos para poder sacar resultados potentes. Por lo tanto, es natural que cuando se estudian cociclos hacer restricciones de la anterior definición. Nosotros haremos la siguiente restricción.

**Definición 2.9** (Cociclos interesantes para nosostros)**.** Sea $M$ una variedad compacta y $f\colon M \to M$ una aplicación. Sea $A\colon M \to GL(\mathbb{R}, n)$ una aplicación contínua. Diremos que el par $(f, A)$ definen el *cociclo* siguiente

$$\begin{array}{cccc} (f,A)\colon & M \times \mathbb{R}^n & \to & M \to \mathbb{R}^n \\ & (p,v) & \to & (f(p), A(p)v) \end{array} \tag{2}$$

**Notación 2.10.** Denotaremos por $(f^n(p), A^n(p)v)$ al iterado $n$ ésimo de $(f, A)(p, v)$. Con esta notación tenemos que

$$A^n(p) = \begin{cases} A(f^{(n-1)}(p)) \cdots A(f(p)) \cdot A(p) & \text{si} \quad n > 0 \\ Id & \text{si} \quad n = 0 \\ A(f^{(n)}(p))^{-1} \cdots A(f^{-1}(p))^{-1} & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

**Ejemplo 2.11** (Cociclo de Schrödinger)**.** Sea $M = \mathbb{T}$ el toro de dimensión 1 y sea $V\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. El cociclo de Schrödinger está definido por el par $(R_\omega, A)$ donde $R_\omega$ es la rotación rigida en el toro de ángulo $\omega$ y

$$A = \begin{pmatrix} V(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La importancia de este cociclo es que surge de forma natural en muchos contextos y, por lo tanto, ha sido estudiado por muchos autores. El problema de los diez martinis es un buen ejemplo (vease [Puig2], [Puig3]).

# 3. Exponentes de Lyapunov

Cuando estamos en el contexto dinámico-numérico de variedades invariantes una de las cosas que se calculan son los exponentes de Lyapunov. Estos se definen como:

**Definición 3.1** (Exponentes de Lyapunov para difeomorfismos)**.** Sea $v$ un vector no nulo y $p \in V$.

El *forward Lyapunov exponent* se define como

$$\lambda^+(p, v) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \log(||Df_p^N v||)$$

El *backward Lyapunov exponent* se define como

$$\lambda^-(p, v) = \lim_{N \to -\infty} \frac{1}{N} \log(||Df_p^N v||)$$

Estas dos definiciones se trasladan en el caso de cociclos de la siguiente forma:

**Definición 3.2** (Exponentes de Lyapunov para cociclos)**.** Sea $v$ un vector no nulo y $p \in M$.

El *forward Lyapunov exponent* se define como

$$\lambda^+(p,v) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \log(||A^N(p)v||)$$

El *backward Lyapunov exponent* se define como

$$\lambda^-(p,v) = \lim_{N \to -\infty} \frac{1}{N} \log(||A^N(p)v||)$$

Los exponentes de Lyapunov nos ayudan estudiar cómo es la dinámica del cociclo. Nos dicen si bajo iteración los vectores crecen o no. Un teorema muy importante en este contexto es el siguiente:

**Teorema 3.3** (Teorema de Osedelet, [Arnold])**.** *Sea $(f, A)$ un cocicle definido en $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$. Entonces existe un subconjunto invariante $R$ de $\mathbb{T}$ de medida total tal que para toda $\theta \in R$ se cumple:*

- *Para todo vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ los siguientes límites existe:*

  $$\lambda^+(\theta,v) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \log(||A^N(\theta)v||)$$

  $$\lambda^-(\theta,v) = \lim_{N \to -\infty} \frac{1}{N} \log(||A^N(\theta)v||)$$

  *Además, el conjunto de valores que que dan los dos son el mismo y finito: $\{\chi_1(\theta) > \ldots > \chi_k(\theta)\}$, donde $k = k(\theta)$.*

- *Existe un splitting $\mathbb{R}^n_\theta = E^1_\theta \oplus \cdots \oplus E^k_\theta$ tal que para todo vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n_\theta$,*

  $$\lambda^+(\theta,v) \leq \chi_j(\theta) \text{ si y solo si } v \in E^j_\theta \oplus \cdots \oplus E^k_\theta$$
  $$\lambda^-(\theta,v) \leq \chi_j(\theta) \text{ si y solo si } v \in E^1_\theta \oplus \cdots \oplus E^j_\theta$$

  *Este splitting es medible.*

- *Las aplicaciones lineales $(A^n(\theta)^T A^n(\theta))^{\frac{1}{2n}}$ convergen cuando $n \to +\infty$ a una aplicación lineal tal que sus valores propios son $\exp(\chi_1(\theta)) > \cdots > \exp(\chi_k(\theta))$. Si $\hat{E}^1_\theta, \ldots, \hat{E}^k_\theta$ denota sus respectivos subespacios propios entonces se tiene que para cada $j = 1, \ldots, k$,*

  $$\hat{E}^j_\theta \oplus \cdots \oplus \hat{E}^k_\theta = E^j_\theta \oplus \cdots \oplus E^k_\theta$$

Este teorema nos afirma que para casi todo $\theta \in \mathbb{T}$ el splitting existe, aunque debido a la generalidad del teorema solo podemos esperar que estos sean medibles.

*Observación* 3.4. Fijémonos que en el caso de variedades NHIM tenemos que el splitting es más que medible, es continuo.

*Ejercicio* 3.5 (Método de la potencia). Dado un $\theta \in R$, demuestra que la medida de los vectores $v$ tales que $\lambda^+(\theta, v) \neq \chi_1$ es cero.

# 4. Transfer Operators

Dada una matriz general $A$, es bien sabido cómo se comportarán los vectores $v$ bajo iteración de ésta. Un resultado clásico como el del método de la potencia nos dice que para casi todo vector no nulo su exponente de Lyapunov es el máximo exponente de Lyapunov y que el vector límite tiene la misma dirección que el vector propio con este exponente. Por lo tanto, al ser los cociclos una generalización de la iteración de matrices, es natural preguntarse si podemos generalizar el resultado del método de la potencia. Un resultado parcial lo tenemos en el último ejercicio de la sección anterior, que nos dice que para casi todo vector no nulo, la iteración de ésta bajo el cociclo tendrá el máximo exponente de Lyapunov. Ahora bien, para tratar bien la dinámica de un cociclo es importante no fijarse en un solo vector de una sola fibra ya que el vector imagen de éste no estará en la misma fibra. Es por esta razón, entre otras muchas otras, que se consideran secciones y el transfer operator.

**Definición 4.1.** Sea $(f, A)$ un cociclo sobre $E = M \times \mathbb{R}^n$.

- Una *sección* es una aplicación $v\colon M \to E$ tal que $\Pi \circ v = Id$, es decir, que el punto base de $v(p)$ es $p$. Al espacio vectorial de secciones lo denotaremos por $\Gamma(E)$.
- El *transfer operator* es una aplicación lineal $\mathcal{A}_f\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ definida de la forma
$$(\mathcal{A}_f v)(p) = A(f^{-1}(p))v(f^{-1}(p))$$

*Observación* 4.2. El espacio de secciones $\Gamma(E)$ tiene subespacios importantes a ser considerados como por ejemplo el de las secciones medibles, contínuas, diferenciables, analíticas...

*Ejercicio* 4.3. Sea $(f, A)$ un cociclo con $f$ un homeomorfismo con dinámica minimal. Sean $v_1, v_2 \in \Gamma(E)$ secciones contínuas. Demuestra que si existe un $p_0$ tal que $v_1(p_0)$ y $v_2(p_0)$ son linealmente independientes, entonces para todo $p$ $v_1(p)$ y $v_2(p)$ son linealmente independientes. ¿Porqué pedimos que la dinámica de $f$ sea minimal?

*Ejercicio* 4.4. Demuestra que si $v$ es una sección invariante y contínua, es decir $(\mathcal{A}_f v)(p) = a(p)v(p)$ con $a(p) \neq 0$, entonces existe un vector propio linealmente dependiente con $v$. ¿Sabrías decir cual es su valor propio?

Un ejemplo muy ilustrativo del éxito de la formulación de los transfer operators lo encontramos en [Mather]. Este artículo dice lo siguiente:

Sea $M$ una variedad compacta y $f\colon M \to M$ un $\mathcal{C}^1$ difeomorfismo. Recordemos que $f$ es Anosov si existe una descomposición en suma directa de $TM = E^+ \oplus E^-$ contínua y existen $C > 1$ y $0 < \lambda < 1$ tal que

- $||Df^k v|| \leq C\lambda^k ||v||$ para todo $k$ positivo.
- $||Df^k v|| \geq C^{-1}\lambda^{-k} ||v||$ para todo $k$ negativo.

En el artículo hay el siguiente teorema:

**Teorema 4.5.** *$f$ es Anosov si y solo si el transfer operator definido por la diferencial sobre el espacio de secciones contínuas $\Gamma(TM)$ es un automorfismo, es decir, si $1$ no está en el espectro.*

Otro ejemplo de éxito de la teoría de los transfer operator se encuentra en [HPS]. Este libro contiene un teorema que dice:

**Teorema 4.6.** *Sea $M$ una variedad compacta, $f\colon M \to M$ un difeomorfismo y $V$ una subvariedad compacta invariante por $f$. Denotaremos por $\mathcal{TV}_f$ el transfer operator definido sobre el espacio de secciones acotadas del espacio tangente $TV$ y denotaremos por $\bar{\mathcal{TV}}_f$ el transfer operator definido sobre el espacio de secciones acotadas $\Gamma(T_V M)/\Gamma(TV)$. Entonces tenemos que $V$ es NHIM si, y solo si, el espectro del transfer operator $\mathcal{TV}_f$ está comprendido dentre de un ánulo centrado en el cero y es disjunto al espectro del transfer operator $\bar{\mathcal{TV}}_f$.*

Este teorema no es más que una traducción, al lenguaje del transfer operator, de que en una variedad NHIM, la dinámica normal domina a la dinámica sobre la variedad.

# 5. Reducibilidad de cociclos

En esta sección introducimos la noción de conjugación de cociclos y la de reducibilidad. Casi toda la información aquí expuesta ha sido extraída de [Puig].

Sean $(f, A)$ y $(f, B)$ cociclos definidos sobre $M \times \mathbb{R}^n$. Diremos que éstos son *conjugados* si existe un cambio de variables que nos lleve de uno a otro, es decir, si existe un cociclo $(0, Z)$ tal que

$$(f, A) \circ (0, Z) = (0, Z) \circ (f, B) \tag{3}$$

La condición (3) se puede escribir también como

$$A(f(p)) \cdot Z(p) = Z(f(p)) \cdot B(p)$$

**Definición 5.1.** Diremos que un cociclo $(f, A)$ es reducible si éste es conjugado a un cociclo de la forma $(f, A_0)$, donde $A_0$ es una matriz constante.

Que un cociclo tenga la propiedad de ser reducible es muy imporante ya que explicar su dinámica entonces es muy fácil, al ser esta conjugada a la dinámica de un cociclo con matriz constante. Es por esto que esta pregunta se hace frecuentemente, aunque su respuesta pueda ser de un nivel de dificultad elevada. No obstante, el siguiente ejercicio nos resuelve el caso en que la dimensión del cociclo es 1.

*Ejercicio* 5.2. Sea $(R_\omega, a)$ un cociclo 1 dimensional, donde $\omega$ es un número diofantino y $a\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ una función analítica que no se anula. Demuestra que es reducible.

*Pista: Éste es un problema de pequeños divisores.*

# Referencias


[Arnold] Arnold, L. *Random Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1998

[HdLL] , Haro, A.; de la Llave, R. *Spectral theory and dynamical systems*, En proceso de revisión, 200?.

[HPS] Hirsch; M.W., Pugh; C.C., Shub, M. *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[Mather] Mather, J.N. *Characterization of Anosov diffeomorphisms*, Indag. Math. 30 (1968)

[Puig] Puig, J. *Reductibility of Quasi-Periodic Skew-Products and the Spectrum of Schrödinger Operators*, Tesis doctoral, 2004.

[Puig2] Puig, J. *A solution of the Ten Martini Problem*, Newsletter of the European Mathematical Society. September 2005, Issue 57.

[Puig3] Puig, J. *El Problema dels Deu Martinis. Un aperitiu*, Butlletí digital de la FME, curs Einstein (2004-2005). ISBN 84-7653-882-0.

[Yoccozz] Yoccozz, J.-C. *Some questions and remarks about* $SL(2,\mathbb{R})$ *cocycles* In: *Modern Dynamical Systems and Applications*, Cambridge University Press, 2004.