

Solar Sailing en el Sistema Terra Lluna

Ariadna Farrés Basiana
Desembre 2005

Índex

1	Introducció	4
2	Solar Sailing	6
2.1	Pressió Solar	6
2.2	Acceleració Característica	7
2.3	Orientació de la Vela	7
2.4	L' Atracció Gravitatòria	8
2.5	Pressió de Radiació Solar	9
3	Treballs Previs	11
3.1	Òrbites Heliocèntriques	11
3.2	Òrbites Geocèntriques	14
3.3	Aplicacions a Missions	15
4	Equacions per a Modelar la Dinàmica al Voltant de la Terra	16
4.1	Problema de Dos Cossos amb Vela	16
4.2	Equacions per als Elements Orbitals	17
4.3	Problema Restringit Bicircular amb Vela	18
5	Maniobres d'Escapament amb una Vela Solar	25
5.1	Control On - Off	25
5.2	Control Direccional	27
5.3	Optimització del Control Direccional	28
5.4	Conclusions	30
6	Dinàmica Natural del Problema	33
6.1	Comportament al voltant de L_1	34
6.1.1	Continuant respecte l'efectivitat de la vela κ	34
6.1.2	Continuant respecte l'angle d'atac α	36
6.2	Comportament al voltant de L_2	36
6.2.1	Continuant respecte l'efectivitat de la vela κ	37
6.2.2	Continuant respecte l'angle d'atac α	37
6.3	Comportament al voltant de L_4	38
6.3.1	Continuant respecte l'efectivitat de la vela κ	39
6.3.2	Continuant respecte l'angle d'atac α	40
6.4	Conclusions	41
	APÈNDIX	42
A	Existència d'Òrbites Periòdiques al Voltant de L_i	42

B El Mètode de Continuació	43
B.1 El Mètode de Predicció	43
B.2 El Mètode de Correcció	44
B.3 Control de Pas	45
C Tir Paral·lel	46
REFERÈNCIES	50

1 Introducció

El *Solar Sailing* és una tècnica de navegació espacial basada en aprofitar l'impuls produït per la reflexió de la llum solar sobre una superfície reflectora (i.e., vela solar). Com hom pot imaginar, la quantitat d'impuls disponible és molt limitat i, per tant, aquesta tècnica només és adequada per naus no molt grans (no tripulades) on el temps de viatge no és un paràmetre important. En aquest tipus de navegació, les maniobres es fan canviant l'orientació de la vela solar. Tot i que l'acceleració que s'obté és molt més petita que l'obtinguda a partir d'un motor de propulsió química, la vela proporciona un impuls continu i indefinit, el que pot reduir dràsticament el cost de missions de llarga durada doncs no cal carregar de combustible les naus. Aquesta reducció de costos permet que entitats de baix pressupost puguin fer missions espacials. Un bon exemple n'és la missió COSMOS 1, que és una col·laboració entre la Planetary Society (entitat privada que fomenta l'exploració espacial) i l'agència espacial russa. Podeu trobar més detalls a http://www.planetary.org/programs/projects/solar_sailing/

En aquest treball, primer farem una ràpida revisió dels conceptes bàsics que hi ha darrera el *Solar Sailing*. Discutirem quins són els paràmetres que defineixen els diferents tipus de vela. No totes les veles són iguals –hi ha diferents formes i textures– però no ens fixarem en aquest aspectes sinó en la seva efectivitat. En el treball considerarem una vela amb unes característiques donades i mirarem les seves possibilitats.

A continuació, donarem un cop d'ull al que s'ha fet fins ara en *Solar Sailing*. Una bona referència és el llibre [12] que, entre d'altres coses, resumeix els treballs publicats fins al 1999. En aquest resum bibliogràfic, hem inclòs una sèrie d'articles recents per complementar la informació d'aquest llibre.

El següent pas considerem models per al moviment d'una nau que utilitza *Solar Sailing* per moure's al voltant de la Terra. Aquí no només hem inclòs els models continguts en la bibliografia, sinó que també n'hem desenvolupat un de nou, que combina l'efecte gravitacional de Terra, Lluna i Sol amb l'efecte de la vela. El model s'ha obtingut suposant que la Terra i Lluna giren de forma circular al voltant del seu centre de masses i aquest alhora gira al voltant del centre de masses Terra - Lluna i Sol. Aquest model està basat en el Problema Restringit Bicircular (BCP) afegint-li l'efecte degut a la pressió solar obtenint un model per al moviment de la vela que anomenarem BCPS. Aquest últim model és una pertorbació del RTBP. És ben conegut que el RTBP té cinc punts d'equilibri, que quan afegim les pertorbacions esdevenen òrbites periòdiques. Discutirem l'existència d'aquestes òrbites periòdiques respecte els paràmetres de la vela (l'efectivitat de la vela i la seva orientació). Ens fixarem en el comportament al voltant de L_1 , L_2 i L_4 , i veurem que al voltant de L_4 existeixen molt poques òrbites periòdiques. La raó és que, a prop de L_4 , les forces gravitacionals són molt petites i la força dominant sobre el satèl·lit ve donat per l'impuls de la vela. Es veu que, per mantenir-nos prop de L_4 és millor tenir veles molt poc efectives. Al voltant de L_1 i L_2 observem un fenomen similar, però en aquest cas la força d'atracció de Terra i Lluna són més rellevants quan ens apartem una mica del punt d'equilibri. En aquest cas és

natural l'ús de veles més eficients que les necessàries per L_4 .

En un altre apartat del treball discutim algunes maniobres per escapar de l'atracció de la Terra. Hi ha tres maniobres bàsiques a tenir en compte: el control on - off, el control direccional i el control direccional òptim. En totes elles haurem de rotar la vela d'alguna manera per a poder guanyar energia i així augmentar el semieix major. Aquestes maniobres ja han estat estudiades per altres autors. En el treball hem resumit aquests estudis, i hem implementat aquestes estratègies de control per simular maniobres en un model estàndard.

Aquest treball és un primer pas per aplicar les eines pròpies de la teoria de sistemes dinàmics a la navegació espacial amb *Solar Sailing*.

2 Solar Sailing

En aquesta secció volem donar una visió general del problema. Donarem unes quantes definicions bàsiques i explicarem una mica la física que hi ha darrera el *Solar Sailing*. D'aquesta manera podrem entendre una mica millor el que passa.

L'impacte dels fotons del Sol amb la superfície de la vela solar i la seva posterior reflexió produirà un impuls sobre aquesta. Les velas solars estan fetes d'un material especial altament reflector per tal de poder maximitzar l'impuls produït per l'impacte dels fotons. Variant l'orientació de la vela respecte la direcció dels fotons incidents l'àrea projectada varia i per tant la magnitud de la força i la direcció d'aquesta variarà. La pressió solar també dependrà de la distància al Sol, com més aprop hi estiguem més forta serà.

2.1 Pressió Solar

La **pressió solar** que s'exerceix sobre una vela deguda a l'impacte dels fotons ve definida pel moment per instant de temps i unitat d'àrea:

$$P = \frac{1}{A} \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right), \quad (1)$$

i el que volem és la magnitud en termes de l'energia del Sol.

L'energia E deguda a una partícula en moviment es pot escriure com

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \quad (2)$$

on m_0 és la massa del cos, p és el moment i c la velocitat de la llum. El primer terme de l'equació correspon a l'energia en repòs del cos mentre que la segona part representa l'energia deguda al seu moviment. Com que els fotons tenen massa zero, la seva energia es pot escriure com $E = pc$ i,

$$\Delta E = \Delta pc. \quad (3)$$

El flux de l'energia W (energia que creua per unitat d'àrea i unitat de temps) a una distància r del Sol es pot escriure en termes de la lluminositat del Sol L_S i la distància Sol - Terra $R_E = 1$ U.A. com,

$$W = W_E \left(\frac{R_E}{r} \right)^2, \quad (4)$$

on, $W_E = \frac{L_S}{4\pi R_E^2}$ és l'energia del flux a 1 U.A.. Per definició l'energia ΔE que travessa una superfície A normal a la radiació incident durant un temps Δt ve donat per

$$\Delta E = WA\Delta t. \quad (5)$$

Amb les equacions (1), (3) i (5) tenim que la pressió sobre la superfície deguda al moment transportat per els fotons és

$$P = \frac{W}{c}. \quad (6)$$

Finalment, usant l'equació (6) tenim que la pressió solar exercida sobre una vela solar a 1 U.A. és $P = 4.56 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$.

Hi ha tres conceptes importants a tenir en compte quan volem construir models que simulin la dinàmica d'un satèl·lit amb una vela solar, l'acceleració característica de la vela, l'orientació i les forces que actuen sobre aquesta.

2.2 Acceleració Característica

La mida estàndard en astrodinàmica per a comparar l'efectivitat de les veles és l'**acceleració característica**, que es defineix com la radiació solar exercida per una vela a 1 unitat astronòmica del Sol.

Hem vist que a 1 U.A. del Sol la pressió solar P és $4.56 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$. Multiplicant la pressió per l'àrea de la vela A tenim la força dels fotons incidents i hi afegirem un factor 2 per a considerar que els fotons reflectits contribueixen amb una força igual però en direcció contrària. Si finalment ho dividim per la massa tindrem l'acceleració característica a_0 ,

$$a_0 = \frac{F_{vela}}{m_{sat}} = \frac{2PA}{m}. \quad (7)$$

Com que la vela no sempre serà perfectament reflectora podem afegir un paràmetre η tenint llavors,

$$a_0 = \frac{2\eta PA}{m}.$$

2.3 Orientació de la Vela

L'orientació de la vela ve donada per dos angles, l'**angle d'atac** α i l'**angle horari** δ . L'angle d'atac és el comprés entre la línia del Sol i el vector normal a la vela. L'angle horari és l'angle entre el vector normal al pla de l'òrbita i la projecció del vector normal en el pla que té per direcció normal la direcció del Sol, tal i com podem observar a la Figura 1.

Suposarem que $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i $\delta \in [0, \pi]$. En un bon sistema de coordenades $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{p} \times \vec{q}\}$, on \vec{p} és un vector unitari en la direcció del Sol i \vec{q} és un vector unitari normal al pla de l'òrbita, el vector normal a la vela es pot escriure en termes d'aquest com,

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{p} + \sin \alpha \cos \delta \vec{q} + \sin \alpha \sin \delta \vec{p} \times \vec{q}.$$

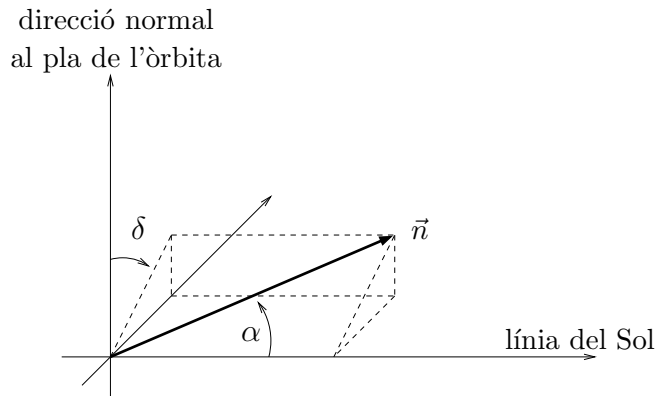


Figura 1: Orientació dels angles d'atac (α) i horari (δ) de la vela solar.

En les properes seccions treballarem amb el cas pla i per tant $\delta = 0$, llavors $\vec{n} = \cos \alpha \vec{p} + \sin \alpha \vec{q}$

Sobre la vela solar hi actuen vàries forces, la radiació solar i la atracció gravitatòria d'altres planetes, satèl·lits i altres cossos. Entendre-les ens serà molt útil a l'hora de crear models per al moviment. El nostre objectiu principal serà crear models propers a la realitat per a poder fer simulacions realistes i que ens ajudin en l'anàlisi de missions.

Segona Llei de Newton:

Les forces que actuen sobre un cos són directament proporcionals a la seva acceleració, on la constant de proporcionalitat és la massa del cos

$$m\ddot{x} = F.$$

Per tant l'acceleració a la que està sotmesa la nau espacial serà proporcional a la suma de les forces que actuen sobre ella. Com que hi ha moltes forces que actuen sobre aquesta, haurem d'escollir quines d'elles tenen un efecte més important.

Les dues forces més importants a considerar són l'**atracció gravitatòria** entre dos cossos qualsevol i la **pressió solar** que actua sobre la vela.

2.4 L' Atracció Gravitatòria

Llei de Gravitació Universal:

La força d'atracció gravitatòria entre dos cossos de massa puntual és directament proporcional al producte de les masses i inversament proporcional al quadrat de la distància entre elles.

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

on $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

La força serà en la direcció que uneix les dues masses tal i com podem veure en la Figura 2. Per tant si \vec{r}_{12} és el vector que va de m_1 a m_2 ,

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_{12}\|^3} \vec{r}_{12}.$$

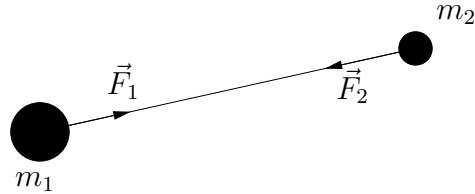


Figura 2: Atracció gravitatòria entre dos cossos.

2.5 Pressió de Radiació Solar

Tal i com ja hem mencionat, l'impacte de fotons produeix moviment sobre la vela.

Suposarem que la nostra vela és perfectament reflectora i per tant els fotons incidents seran reflectits amb un angle i una força igual a l'incident tal i com podem observar a la Figura 3. En cas que la vela no fos perfectament reflectora els fotons reflectits ho faran amb menys força i amb un angle lleugerament diferent al angle incident. Podem considerar que el fet de no ser perfectament reflector és una pertorbació del model ideal.

Considerem una vela d'àrea A i sigui \vec{n} un vector unitari normal a la seva superfície. La força produïda pels fotons incidents en direcció \vec{u}_i ve donada per,

$$\vec{F}_i = PA \langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle \vec{u}_i.$$

El vector reflectit produirà una força igual en magnitud en la direcció $-\vec{u}_r$ sobre la vela. Per tant,

$$\vec{F}_r = -PA \langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle \vec{u}_r.$$

Observem que $A \langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle$ és l'àrea projectada sobre la vela en la direcció \vec{u}_i , llavors el producte amb la pressió P ens dóna la magnitud de la força sobre la vela.

La força total sobre la vela serà la suma d'aquestes dues forces $\vec{F}_i + \vec{F}_r$. Usant que $\vec{u}_i - \vec{u}_r = 2 \langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle \vec{n}$ tenim,

$$\vec{F} = 2PA \langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle^2 \vec{n}. \quad (8)$$

Amb les equacions (6) i (4),

$$\vec{F} = \frac{2AW_E}{c} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle^2 \vec{n}. \quad (9)$$

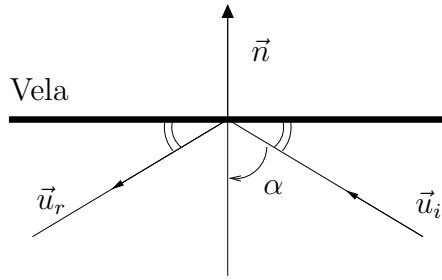


Figura 3: Reflexió dels fotons en una vela perfectament reflectora.

Si α és l'angle d'atac, llavors $\langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle = \cos \alpha$ ja que \vec{n} i \vec{u}_i són vectors unitaris. Per tant l'acceleració deguda a la vela serà,

$$\vec{a} = \frac{2W_E}{c\sigma} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \cos^2 \alpha \vec{n}, \quad (10)$$

on $\sigma = m/A$.

Si ens movem en una òrbita heliocèntrica, la direcció dels fotons incidents \vec{u}_i ve donada pel vector radial que uneix el Sol i la vela solar (\vec{r}). Com que la pressió solar ara depèn de l'invers de la distància al Sol, la podem escriure en termes de l'acceleració gravitacional,

$$\vec{F}_{vela} = \beta \frac{GM_S}{r^2} \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle^2 \vec{n}, \quad (11)$$

on $\beta = \frac{L_s A}{2\pi GM_S c}$ s'anomena el **nombre de lleugeresa de la vela** que ens dóna la relació entre l'acceleració produïda per la pressió de radiació solar i la força gravitatòria d'atracció del Sol. És un paràmetre independent de la distància al Sol i que ens dóna una idea de l'efectivitat de la vela igual que l'acceleració característica. És fàcil comprovar que una acceleració característica de 1 mm/s^2 dóna un número de lleugeresa de 0.1686.

Si ens movem prop de la Terra, podem considerar que la pressió solar és constant, ja que la distància variarà poc, i per tant la pressió solar és,

$$\vec{F}_{vela} = \kappa \langle \vec{u}_i, \vec{n} \rangle^2 \vec{n}, \quad (12)$$

on,

$$\kappa = \frac{2W_E A}{c}.$$

Aquestes dues formulacions les usarem per a discutir la dinàmica de les òrbites quan estiguem orbitant al voltant del Sol o prop de la Terra.

3 Treballs Previs

En aquesta secció parlarem d'alguns treballs previs sobre el *Solar Sailing*. Donarem algunes referències interessants i explicarem alguns dels resultats que hi ha.

La principal referència que hi ha en *Solar Sailing* és el llibre d'en C.R.McInnes [12]. Aquest és un recull molt extens sobre tot el que hi ha en el tema fins a la seva data de publicació (1999). Comença amb una breu descripció del problema, la història que hi ha al darrera i la motivació. Després explica el rerefons físic de perquè l'impacte i posterior reflexió dels fotons sobre una superfície reflectora produeix un impuls sobre un satèl·lit. També s'introdueixen algunes definicions bàsiques com l'angle d'atac, l'angle horari, l'acceleració característica, entre d'altres i es dóna un cop d'ull al disseny de veles solars i la seva efectivitat. Finalment es para atenció a la dinàmica que segueixen les veles, parlant de les òrbites heliocèntriques, geocèntriques i no-keplerianes i una descripció de l'ús d'aquestes en el disseny de missions espacials. Es mostraran algunes de les missions que hi ha pensades i l'estudi d'aquestes. Mentre veiem algun d'aquest apartats mencionarem alguns article relacionats d'interès.

Com ja hem dit en la primera part del llibre es fa referència a les definicions bàsiques i a l'aspecte més físic del problema que hem resumit a la secció 2. Si volem entendre la dinàmica del problema cal distingir dos tipus d'òrbites, les Heliocèntriques (les que apareixen quan orbitem al voltant del Sol) i les geocèntriques (si orbitem al voltant de la Terra).

3.1 Òrbites Heliocèntriques

Les primeres òrbites que es consideren quan s'estudia la navegació per l'espai amb una vela solar són les òrbites que surten quan l'única força gravitacional és el Sol. Si només considerem la força d'atracció del Sol i la força de la vela solar, les equacions del moviment són:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^2}\vec{r} = \beta \frac{\mu}{r^2} \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle^2 \vec{n}, \quad (13)$$

on β és el que es coneix com el número de lleugeresa de la vela, que ens dóna una idea de l'efectivitat de la vela independentment de la distància al Sol.

Les trajectòries que surten d'aquí en la majoria dels casos poden ser trobades de forma analítica. Distingirem dos casos privilegiats; si fixem l'angle d'atac (α) en 0° , col·locant la vela totalment perpendicular a la radiació solar, obtenint el que anomenarem seccions còniques, en canvi, si fixem l'angle d'atac en qualsevol altre angle obtindrem el que anomenem espirals logarítmiques.

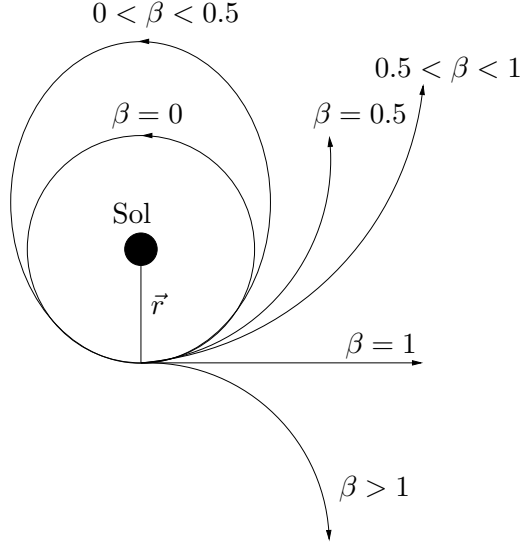


Figura 4: Tipus d'òrbites heliocèntriques per $\alpha = 0^\circ$ en funció del número de lleugeresa de la vela (β).

(a) **Seccions Còniques:**

Si fixem l'angle d'atac $\alpha = 0^\circ$ el vector normal a la vela està alineat en la direcció del Sol i per tant $\vec{n} = \vec{r}/\|\vec{r}\|$ quedant les equacions:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu(1-\beta)}{r^2}\vec{r} = 0. \quad (14)$$

Tenim un moviment de dos cossos kepleriana però amb un paràmetre de masses diferent ($\tilde{\mu} = \mu(1-\beta)$). Aquestes equacions es poden resoldre:

$$r = \frac{h^2/\tilde{\mu}}{1 + e \cos f}. \quad (15)$$

Lavors en funció de β tindrem un tipus de còniques o unes altres. Si $0 < \beta < 0.5$ les òrbites seran el·líptiques, amb més excentricitat a mida que augmentem l'efectivitat de la vela. Per $\beta = 0.5$ creuem la frontera passant a tenir una òrbita parabòlica i per $0.5 < \beta < 1$ tenim òrbites hiperbòliques. Si $\beta = 1$ tenim que la força d'atracció del Sol i l'acceleració de la vela es cancel·len proporcionant trajectòries rectes tal i com podem veure en la Figura 4. I per a $\beta > 1$ tenim un cas degenerat en el que la força primordial és la de la vela i l'atracció gravitatòria del Sol és una pertorbació.

(b) **Espirals logarítmiques:**

Quan orientem la vela amb un angle d'atac fix ($\alpha \neq 0^\circ$) i tenim una efectivitat de la vela baixa obtenim el que anomenem espirals logarítmiques. Cal mencionar que

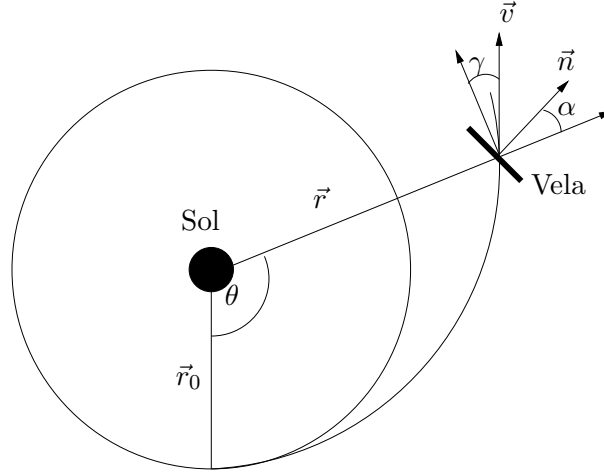


Figura 5: *Espir·logarítmica per a un angle d'atac fixat α .*

en aquest cas podem espiralar allunyant-nos del Sol prenent angles d'atac positius i acostar-nos cap al Sol amb angles d'atac negatius. Si escrivim les equacions del moviment en forma polar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2 &= -\frac{\mu}{r^2} + \beta \frac{\mu}{r^2} \cos^3 \alpha \\ r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2r \left[\frac{dr}{dt} \right] \left[\frac{d\theta}{dt} \right] &= \beta \frac{\mu}{r^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Llavors una solució particular per aquest cas és

$$r(\theta) = r_0 \exp(\theta \tan \gamma),$$

on r_0 és la distància inicial al Sol, γ és l'angle de l'espiral (l'angle entre el vector velocitat i el vector transversal com es veu a la Figura 5) descrivint una trajectòria en forma d'espiral logarítmica.

Aquest tipus d'òrbites són les que ens serviran per a dissenyar missions entre planetes, buscant en cada cas quines són les condicions de sortida i d'arribada que hem de prendre per a sortir de l'òrbita que descriu un planeta i arribar a la d'un altre o bé escapar del sistema solar.

Un dels primers treballs sobre el tema és [1] d'en R.H. Bacon que presenta aquest tipus d'òrbites i explica com usar-les per a les missions interplanetàries, tot en el cas pla. Més endavant J.C. Van der Ha i V.J.Modi presenten un treball més extens en el que estudien aquest tipus d'òrbites en el cas 3-D. Fan un estudi analític de les solucions i acaben trobant solucions exactes en forma d'espiral logarítmica per algunes condicions inicials.

3.2 Òrbites Geocèntriques

Les òrbites geocèntriques apareixen quan orbitem al voltant de la Terra o al voltant de qualsevol altre planeta. S'intenta veure quina és la millor manera de mantenir-se al voltant d'aquesta o bé quines són les maniobres necessàries per escapar-se de la seva atracció.

A [12] es presenten tres maniobres diferents, el control on - off, el control direccional i el control direccional òptim. Les dues primeres mostren una manera d'anar orientant la vela per tal de guanyar energia i per tant augmentar el semieix major. La tercera maniobra orienta la vela per tal de tenir el màxim guany d'energia instantani. A la secció 5 s'expliquen aquestes maniobres amb més detall i es mostren algunes simulacions fetes.

Hi ha altres estudis fets que intenten millorar els resultats presentats a [12]. Tots ells busquen maneres per optimitzar el temps d'escapament, a més, els models que presenten són per al cas espacial, mentre que els que veurem són per al cas pla.

V.L. Covestone i J.E. Prussing [3], [5] presenten un model en 3-D que considera l'efecte gravitacional de la Terra i el Sol. Per tal d'escapar-se de l'atracció de la Terra busca en cada instant quina és l'orientació de la vela que maximitza el guany d'energia. Aquestes òrbites no minimitzen el temps d'escapament però estan molt aprop. En l'estudi que fan presenten resultats per a veles amb diferents acceleracions característiques i diferents condicions inicials. Acaben observant que hi ha una forta dependència amb l'acceleració característica de la vela.

M.A Swartwout [16], [17] presenta una altra idea per a millorar aquest resultat. En lloc de maximitzar el guany d'energia instantani estudia l'opció de maximitzar el guany d'energia per òrbita. Explica que d'aquesta manera es pot evitar fer canvis bruscs en l'orientació de la vela que pugui presentar la maniobra anterior. Presenta també resultats i els compara amb els trobats per V.L. Covestone i J.E. Prussing.

Finalment J.W. Hartmann [4], [6] juntament amb V.L. Covestone i J.E. Prussing presenten òrbites que minimitzen el temps d'escapament. Considerem les òrbites presentades a [3], [5], a les quals anomenen MIRITOE que com ja hem dit abans estan prop de minimitzar el temps d'escapament. Llavors mitjançant un algoritme de minimització DCNPL aconseguen trobar mínims locals per a la solució. És curiós observar que en alguns casos per tal de minimitzar el temps d'escapament en certes parts de l'òrbita cal minimitzar l'energia per a després augmentar-la.

En tots els models presentats no es té en compte l'efecte d'eclipsi de la Terra en alguns punts de l'òrbita ni la pressió atmosfèrica.

K.T Ressler [15] presenta un treball en el que estudia el cost de l'escapament de la Terra. Presenta els principals problemes que ens podem trobar quan s'aborden aquests problemes com seria la pressió atmosfèrica que impedeix fer moviments molt bruscs amb la vela obligant a evitar òrbites d'altitud baixa.

3.3 Aplicacions a Missions

Finalment es presenten diferents missions espacials que fan servir les tècniques prèviament descrites com seria la Missió Geostorm, que pretén enviar un satèl·lit a una òrbita halo del sistema Terra - Sol. La transferència a aquesta halo està pensada de la manera tradicional mentre que el manteniment en aquesta es faria amb la vela solar.

També trobem treballs que presenten missions a altres planetes, el més comú a tots és Mercuri, ja que és el primer en el que la distància ja suposa una millora respecte les missions de la manera convencional. Hi ha diversos estudis fets com són el cas de [8], [9] i [7] que estudien la viabilitat d'aquestes missions per a diferents casos.

Hi ha altres treballs presentats tots amb missions molt interessants però que no hem estudiat amb detall ja que per ara estem interessats en el comportament de la vela en el sistema Terra - Lluna i totes elles es plantegen missions de llargues distàncies a asteroides, Mercuri o per sortir del sistema solar.

4 Equacions per a Modelar la Dinàmica al Voltant de la Terra

En aquesta secció veurem un parell de models que aproximen la dinàmica d'una vela solar al voltant de la Terra. Aquests models els hem construït fixant-nos en els models clàssics de la mecànica celeste, com el Problema de Dos Cossos (TBP) o el Problema Restringit Bicircular (BCP) [2]. Combinant aquests models amb una força externa (la pressió solar) obtenim els següents dos models.

Com ja hem vist la pressió solar i per tant la força que exerceix la vela solar depenen de la distància al Sol. Mentre orbitem prop de la Terra suposarem que aquesta és constant ja que les variacions que experimenta són molt petites.

Els models que presentarem a continuació dependran de dos paràmetres, l'angle d'atac de la vela α i l'efectivitat d'aquesta κ .

4.1 Problema de Dos Cossos amb Vela

En aquesta primera aproximació es considera que la Terra està fixada a l'origen de coordenades i la vela solar està afectada només per l'atracció gravitatòria de la Terra i la pressió solar. Sigui \vec{F}_E la força gravitatòria del Sol i \vec{F}_{vela} la pressió solar, per la segona llei de Newton $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_E + \vec{F}_{vela}$ amb $\vec{F}_E = -\frac{\mu\vec{r}}{r^3}$ i $\vec{F}_{vela} = \kappa\langle\vec{l}, \vec{n}\rangle^2\vec{n}$. On \vec{l} és un vector unitari en la direcció del Sol i \vec{n} és la direcció normal a la vela.

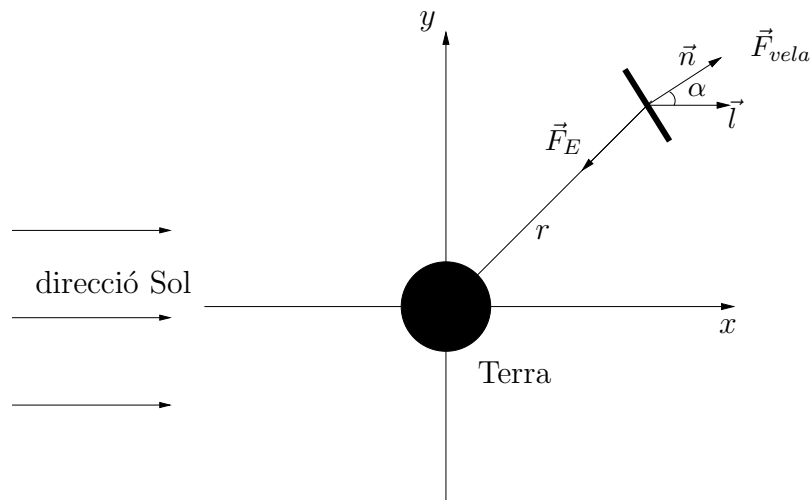


Figura 6: Representació esquemàtica de les forces que actuen sobre la vela solar en el problema de dos cossos amb vela.

Per tant,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3} + \kappa\langle\vec{l},\vec{n}\rangle^2\vec{n}. \quad (17)$$

Suposarem que la pressió del Sol és fixe de l'esquerra, llavors $\vec{l} = (1, 0)$. Si α és l'angle d'atac, $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ i llavors $\langle\vec{l},\vec{n}\rangle^2 = \cos^2 \alpha$. Les equacions del moviment són:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3} + \kappa \cos^3 \alpha \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3} + \kappa \cos^2 \alpha \sin \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

En el cas real, la Terra dona una volta al Sol cada any, i per tant seria més adient considerar que la direcció del Sol no és fixe. Sigui ω_s la freqüència de rotació, llavors $\vec{l} = (\cos \omega_s t, \sin \omega_s t)$ i $\vec{n} = (\cos(\omega_s t + \alpha), \sin(\omega_s t + \alpha))$. Ara la força de la vela és

$$\vec{F}_{vela} = \kappa\langle\vec{l},\vec{n}\rangle^2\vec{n} = \kappa \cos^2 \alpha \vec{n}, \quad (19)$$

i les equacions del moviment són,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3} + \kappa \cos^2 \alpha \cos(\omega_s t + \alpha) \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3} + \kappa \cos^2 \alpha \sin(\omega_s t + \alpha) \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Aquest és el model més simple que podem considerar, però a mida que ens allunyem de la Terra altres cossos com la Lluna han de ser considerats.

4.2 Equacions per als Elements Orbitals

El problema de dos cossos està completament resolt. Se sap que el moviment relatiu dels dos cossos serà el·líptic, parabòlic o hiperbòlic, i això ve determinat per l'energia (h) del sistema. Si $h < 0$ el moviment serà el·líptic, si $h = 0$ aquest serà parabòlic i per $h > 0$ hiperbòlic. La posició dels cossos en aquests tipus d'òrbites estarà totalment determinat pels elements orbitals.

Els elements orbitals són l'excentricitat e , el semieix major a , la inclinació del pla orbital respecte el pla de l'eclíptica i , la longitud del node ascendent Ω , l'argument del periheli ω i l'anomalia veritable f .

Si considerem el problema de dos cossos pertorbat per una força externa, el moviment dels dos cossos serà una pertorbació dels moviments descrits anteriorment. Els elements orbitals també ens ajudaran a determinar la posició d'un cos en funció del temps. Però en aquest cas els elements orbitals no seran fixes, sinó que variaran amb el temps de la següent manera:

$$\frac{da}{df} = \frac{2pr^2}{\mu(1-e^2)^2} \left[Se \sin f + T \frac{p}{r} \right], \quad (21)$$

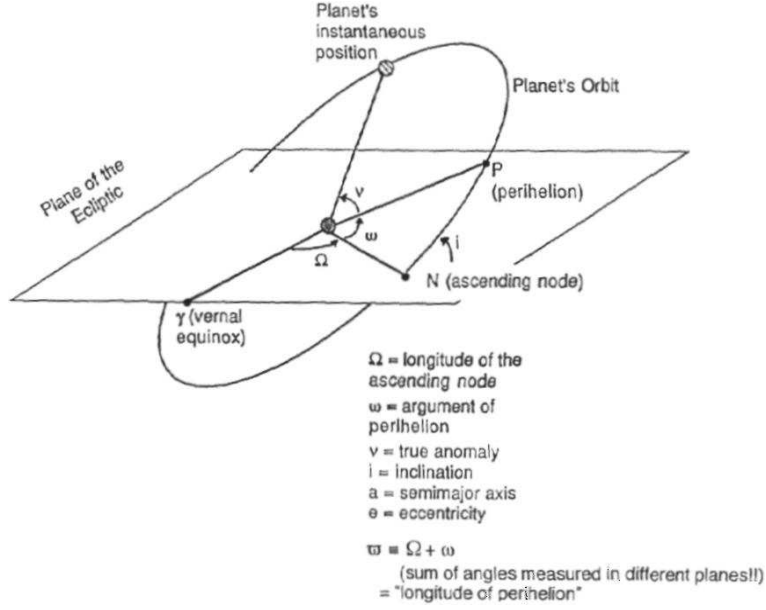


Figura 7: *Els elements orbitals per al moviment el·líptic.*

$$\frac{de}{df} = \frac{r^2}{\mu} \left[S \sin f + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos f + T \frac{r}{p} e \right], \quad (22)$$

$$\frac{di}{df} = \frac{r^3}{\mu p} \cos(f + \omega) W, \quad (23)$$

$$\frac{d\Omega}{df} = \frac{r^3}{\mu p \sin i} \sin(f + \omega) W, \quad (24)$$

$$\frac{d\omega}{df} = -\frac{d\Omega}{df} \cos i + \frac{r^2}{\mu e} \left[-S \cos f + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right], \quad (25)$$

$$\frac{dt}{df} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \left\{ 1 - \frac{r^2}{\mu e} \left[S \cos f - T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] \right\}, \quad (26)$$

on $p = a(1 - e^2)$ és el “*semi-latus rectum*”, $n = \sqrt{\mu/a^3}$ és el moviment mitjà i $M = n(t - \tau)$ l’anomalia veritable on τ és el temps de pas pel periheli.

Els vectors S , T i W són les projeccions radial, transversal i normal de la força deguda a la vela. La deducció d’aquestes fórmules es pot trobar a [14].

4.3 Problema Restringit Bicircular amb Vela

El model que presentem aquí és el més acurat que tenim. A la secció 4.1 només es considera l’efecte gravitatori de la Terra, però a mida que ens allunyem d’aquesta, la Lluna, el seu satèl·lit natural també juga un factor important. També hem inclòs l’efecte gravitacional del Sol i el fet que la Terra gira al seu voltant, i per tant la direcció

del Sol no és constant. Si considerem tots aquests efectes i basant-nos en el model del Problema Restringit Bicircular (BCP)[2] obtindrem el nostre sistema d'equacions.

Suposem que el Sol i el centre de masses del conjunt Terra - Lluna giren al voltant del seu centre de masses de forma circular. Alhora el conjunt Terra - Lluna gira de forma circular al voltant del seu centre de masses tal i com es mostra a la Figura 8.

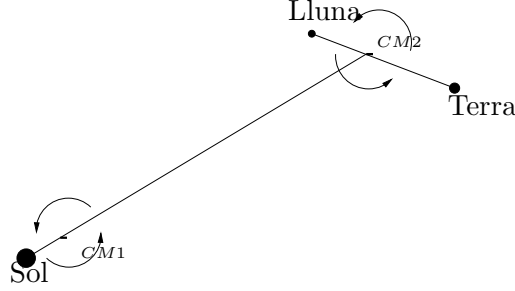


Figura 8: Representació esquemàtica del moviment dels tres cossos en el model Bicircular. $CM1$ és el centre de masses del sistema Terra - Lluna - Sol i $CM2$ el centre de masses del sistema Terra - Lluna.

Volem veure com aquests afecten a un quart cos de massa infinitesimalment petita que no afectarà al moviment d'aquests tres. També hi afegirem la força deguda a la pressió solar sobre la vela.

Si fixem que la suma de les masses de Terra i Lluna sigui 1 igual que la distància entre aquests dos cossos i prenem el període de rotació respecte el centre de masses 2π , la constant de gravitació universal G val 1.

$$\mu = \frac{m_M}{m_E+m_M}, \quad 1 - \mu = \frac{m_E}{m_E+m_M}, \quad m_s = \frac{m_S}{m_E+m_M}. \quad (27)$$

On,

$$\begin{aligned} \mu &\approx 0.012150581623433623 \\ m_s &\approx 328900.54999999906 \end{aligned} .$$

Definim n_s com la velocitat angular del Sol respecte el conjunt Terra - Lluna, llavors $\omega_s = 1 - n_s$ és la freqüència d'aquest moviment. En aquestes unitats,

$$\begin{aligned} n_s &\approx 0.074804014481710354 \\ \omega_s &\approx 0.925195985518289646 \end{aligned} ,$$

i la distància entre el centre de masses del conjunt Terra - Lluna i el centre de masses del sistema és

$$a_s = \left(\frac{1 + m_s}{n_s^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 388.81114302335106.$$

Suposarem el centre de masses del sistema fix a l'origen de coordenades.

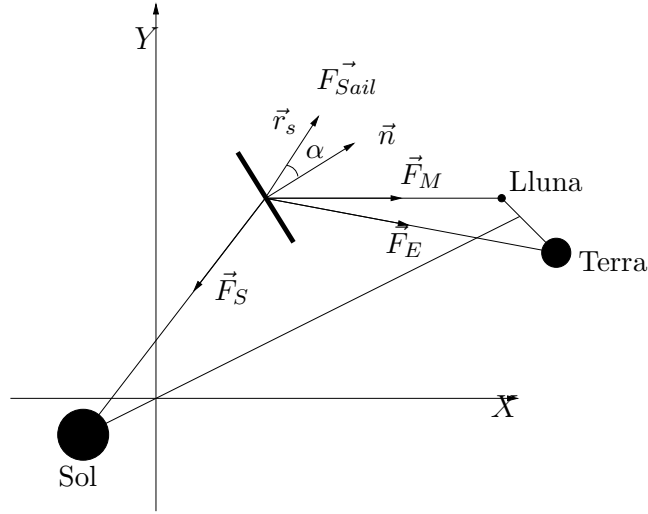


Figura 9: Representació esquemàtica de la relació de forces que actuen sobre la vela solar en el Problema Restringit Bicircular amb Vela.

$$CM1 = \frac{m_s \gamma + 1(a_s - \gamma)}{1 + m_s} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{a_s}{1 - m_s}, \quad (28)$$

on γ és la distància del Sol a l'origen. Per tant,

$$\begin{cases} x_S = \frac{a_s}{m_s - 1} \cos(n_s t) \\ y_S = \frac{a_s}{m_s - 1} \sin(n_s t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{EM} = \frac{-a_s m_s}{m_s - 1} \cos(n_s t) \\ y_{EM} = \frac{-a_s m_s}{m_s - 1} \sin(n_s t) \end{cases}, \quad (29)$$

on (x_{EM}, y_{EM}) és el centre de masses de la parella Terra - Lluna. Com que la Terra i la Lluna giren amb període 2π al voltant del seu centre de masses,

$$\begin{cases} x_E = x_{EM} + \mu \cos t \\ y_E = y_{EM} + \mu \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x_M = x_{EM} + (1 - \mu) \cos t \\ y_M = y_{EM} + (1 - \mu) \sin t \end{cases}. \quad (30)$$

Observem que si $t = 0$ la Terra, la Lluna i el Sol es troben a $(\frac{-a_s m_s}{m_s - 1} + \mu, 0)$, $(\frac{-a_s m_s}{m_s - 1} + (1 - \mu), 0)$ i $(\frac{a_s}{m_s - 1}, 0)$ alineats en un eclipse de Lluna.

Ara que tenim la posició dels cossos en un sistema de coordenades inercials, podem introduir les forces que actuen sobre el quart cos (la forces gravitatòries de la Terra, Lluna, Sol i la pressió solar).

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_E + \vec{F}_M + \vec{F}_S + \vec{F}_{vela},$$

amb,

$$\begin{aligned}\vec{F}_E &= -\frac{\vec{R}_{PE}}{r_{PE}^3}(1-\mu), & \vec{F}_M &= -\frac{\vec{R}_{PM}}{r_{PM}^3}\mu, \\ \vec{F}_S &= -\frac{\vec{R}_{PS}}{r_{PS}^3}m_s, & \vec{F}_{vela} &= \kappa\langle\vec{r}_s, \vec{n}\rangle^2\vec{n},\end{aligned}$$

i,

$$\begin{aligned}r_{PE} &= \sqrt{(X-X_E)^2+(Y-Y_E)^2} \\ r_{PM} &= \sqrt{(X-X_M)^2+(Y-Y_M)^2} \\ r_{PS} &= \sqrt{(X-X_S)^2+(Y-Y_S)^2}\end{aligned}$$

Sigui $\vec{r}_s = (-\cos(n_s t), -\sin(n_s t))$ la direcció de la pressió solar i $\vec{n} = (\cos(n_s t + \alpha), \sin(n_s t + \alpha))$ el vector normal a la vela amb angle d'atac α . Les equacions del moviment són,

$$\left. \begin{aligned}\ddot{X} &= -(1-\mu)\frac{X-X_E}{r_{PE}^3} - \mu\frac{X-X_M}{r_{PM}^3} - m_s\frac{X-X_S}{r_{PS}^3} + \kappa\langle\vec{r}_s, \vec{n}\rangle^2 n_x \\ \ddot{Y} &= -(1-\mu)\frac{Y-Y_E}{r_{PE}^3} - \mu\frac{Y-Y_M}{r_{PM}^3} - m_s\frac{Y-Y_S}{r_{PS}^3} + \kappa\langle\vec{r}_s, \vec{n}\rangle^2 n_y\end{aligned}\right\}. \quad (31)$$

Per tal d'eliminar la dependència quasi-periòdica del temps, introduïrem un canvi de coordenades sinòdic. Com que estem interessats en el comportament al voltant de la Terra, fixarem l'eix que uneix els primaris Terra i Lluna a l'eix de les x 's.

Primer traslladem el centre de masses Terra - Lluna (X_{EM}, Y_{EM}) a l'origen.

$$\left\{ \begin{aligned}U &= X + \frac{m_s}{1-m_s}a_s \cos n_s t \\ V &= Y + \frac{m_s}{1-m_s}a_s \sin n_s t\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}\ddot{U} &= \ddot{X} - \frac{m_s n_s^2}{1-m_s}a_s \cos n_s t \\ \ddot{V} &= \ddot{Y} - \frac{m_s n_s^2}{1-m_s}a_s \sin n_s t\end{aligned}\right.$$

Llavors,

$$\left. \begin{aligned}\ddot{U} &= -(1-\mu)\frac{U-U_E}{r_{PE}^3} - \mu\frac{U-U_M}{r_{PM}^3} - m_s\frac{U-U_S}{r_{PS}^3} - \\ &\quad \frac{m_s}{a_s^2} \cos(n_s t) + \kappa\langle\vec{r}_s, \vec{n}\rangle^2 n_x \\ \ddot{V} &= -(1-\mu)\frac{V-V_E}{r_{PE}^3} - \mu\frac{V-V_M}{r_{PM}^3} - m_s\frac{V-V_S}{r_{PS}^3} - \\ &\quad \frac{m_s}{a_s^2} \sin(n_s t) + \kappa\langle\vec{r}_s, \vec{n}\rangle^2 n_y\end{aligned}\right\}, \quad (32)$$

on,

$$\left\{ \begin{aligned}U_E &= \mu \cos t \\ V_E &= \mu \sin t\end{aligned}\right\}, \left\{ \begin{aligned}U_M &= (\mu-1) \cos t \\ V_M &= (\mu-1) \sin t\end{aligned}\right\}, \left\{ \begin{aligned}U_E &= a_s \cos n_s t \\ V_E &= a_s \sin n_s t\end{aligned}\right\}. \quad (33)$$

Introduïm ara aquest canvi de variables per a fixar Terra - Lluna a l'eix de les x 's tal i com podem veure a la Figura 10.

$$\begin{cases} U = x \cos t - y \sin t \\ V = x \sin t + y \cos t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = U \cos t + V \sin t \\ y = -U \sin t + V \cos t \end{cases}.$$

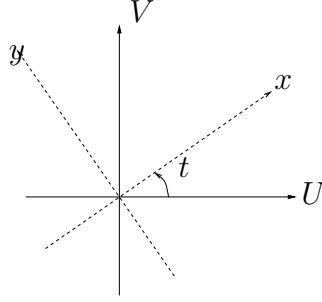


Figura 10: *Relació entre el sistema de coordenades sinòdiques i el sistema de coordenades inercials.*

Derivant dos cops $U = U(x, y)$, $V = V(x, y)$ respecte el temps t tenim,

$$\begin{cases} \ddot{U} = \ddot{x} \cos t - 2\dot{x} \sin t - x \cos t - \ddot{y} \sin t - 2\dot{y} \cos t + y \sin t \\ \ddot{V} = \ddot{x} \sin t + 2\dot{x} \cos t - x \sin t + \ddot{y} \cos t - 2\dot{y} \sin t - y \cos t \end{cases}. \quad (34)$$

Observem,

$$\begin{cases} \ddot{U} \cos t + \ddot{V} \sin t = \ddot{x} - 2\dot{y} - x \\ \ddot{U} \sin t - \ddot{V} \cos t = -\dot{y} - 2\dot{x} + y \end{cases}. \quad (35)$$

Introduint aquest canvi de variables a (32) i usant les identitats trigonomètriques,

$$\begin{aligned} \cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ \sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{aligned}, \quad (36)$$

tenim,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + x - \frac{1-\mu}{r_{PE}^3}(x-\mu) - \frac{\mu}{r_{PM}^3}(x+1-\mu) - \frac{m_s}{r_{PS}^3}(x-x_s) \\ &\quad - \frac{m_s}{a_s^2} \cos(t - n_s t) - k \cos^2 \alpha \cos(t - n_s t - \alpha) \\ \ddot{y} &= 2\dot{x} - \left(1 - \frac{1-\mu}{r_{PE}^3} - \frac{\mu}{r_{PM}^3}\right) y - \frac{m_s}{r_{PS}^3}(y-y_s) \\ &\quad + \frac{m_s}{a_s^2} \sin(t - n_s t) + k \cos^2 \alpha \sin(t - n_s t - \alpha) \end{aligned} \right\}. \quad (37)$$

Després del canvi de variables r_{PE} , r_{PM} , r_{PS} són,

$$\begin{aligned} r_{PE} &= \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2} \\ r_{PM} &= \sqrt{(x - \mu + 1)^2 + y^2} \quad , \\ r_{PS} &= \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} \end{aligned}$$

amb $x_s = a_s \cos(t - n_s t)$ i $y_s = -a_s \sin(t - n_s t)$.

Finalment, introduïrem un canvi de variables per escriure les equacions de forma Hamiltoniana. Si considerem els moments $p_x = \dot{x} - y$ i $p_y = \dot{y} + x$ i la freqüència $\omega_s = 1 - n_s$ tenim,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{p}_x &= p_y - \frac{1 - \mu}{r_{PE}^3}(x - \mu) - \frac{\mu}{r_{PM}^3}(x - \mu + 1) - \frac{m_s}{r_{PS}^3}(x - x_s) \\ &\quad - \frac{m_s}{a_s^2} \cos \omega_s t - k \cos^2 \alpha \cos(\omega_s t - \alpha) \\ \dot{p}_y &= -p_x - \left(\frac{1 - \mu}{r_{PE}^3} + \frac{\mu}{r_{PM}^3} \right) y - \frac{m_s}{r_{PS}^3}(y - y_s) \\ &\quad + \frac{m_s}{a_s^2} \sin \omega_s t + k \cos^2 \alpha \cos(\omega_s t - \alpha) \end{aligned} \right\} . \quad (38)$$

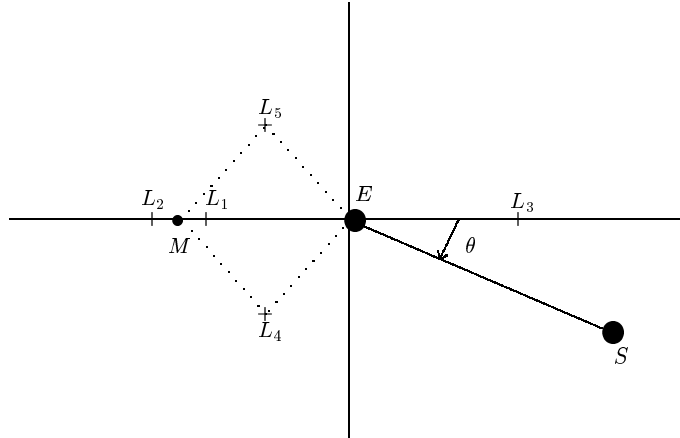


Figura 11: *Posició dels cossos en el Problema Restringit Bicircular en el sistema de coordenades sinòdic.*

Que té per Hamiltonià,

$$\begin{aligned}
H_{BCPS} &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_{PE}} - \frac{\mu}{r_{PM}} - \\
&\varepsilon m_s \left(\frac{1}{r_{PS}} - \frac{y \sin(\omega_s t) - x \cos(\omega_s t)}{a_s^2} \right) - \\
&\kappa \cos^2 \alpha (y \sin(\omega_s t - \alpha) - x \cos(\omega_s t - \alpha)),
\end{aligned} \tag{39}$$

Observem que el Hamiltonià és una pertorbació del RTBP $H_{BCPS} = H_{BCP} + \kappa H_{Sail} = H_{RTBP} + \varepsilon H_{BC} + \kappa H_{Sail}$. on,

$$\begin{aligned}
H_{RTBP} &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_{PE}} - \frac{\mu}{r_{PM}}, \\
H_{BC} &= -m_s \left(\frac{1}{r_{PS}} + \frac{y \sin(\omega_s t) - x \cos(\omega_s t)}{a_s^2} \right), \\
H_{Sail} &= -\cos^2 \alpha (y \sin(\omega_s t - \alpha) - x \cos(\omega_s t - \alpha)).
\end{aligned}$$

Com veurem en la secció 6 el RTBP té 5 punts fixes coneguts, quan introduïm la pertorbació deguda a la massa del Sol ($\varepsilon = 1$) i la pressió de la vela, aquests punts fixes esdevenen òrbites periòdiques de període $2\pi/\omega_s$. Les voldrem trobar i estudiar la seva efectivitat per a un futur anàlisi de missió.

5 Maniobres d'Escapament amb una Vela Solar

En aquesta secció explicarem com podem maniobrar per escapar-nos de l'atracció de la Terra usant una vela solar. Aquestes maniobres també seran útils per escapar-nos de qualsevol altre planeta i essencials per a qualsevol missió. Discutirem tres maniobres presentades a [12], i farem simulacions amb totes tres.

Per a totes les simulacions fetes, hem usat el model TBPS ja que ens interessen òrbites molt properes a la Terra on l'efecte dels altres objectes es pot menysprear. Cal dir que mentre s'orbita al voltant de la Terra hi ha períodes d'eclipsi degut a les dimensions de la Terra que afectarà a la radiació solar en alguns instants de temps, però per una primera aproximació aquest efecte no s'ha considerat.

5.1 Control On - Off

En aquesta primera maniobra s'intentarà guanyar energia posant la vela perpendicular a la direcció del Sol mentre es va a favor del Sol, tenint tota la superfície de la vela disponible. Mentre s'orbita cap al Sol, s'alinea la vela amb la direcció del Sol anul·lant l'efecte d'aquesta. Per tant durant la primera mitja part de l'òrbita l'angle d'atac (α) de la vela serà de 0° i durant l'altre meitat aquest serà de 90° tal i com s'observa a la Figura 12. Això implica una rotació de 90° dos cops per òrbita.

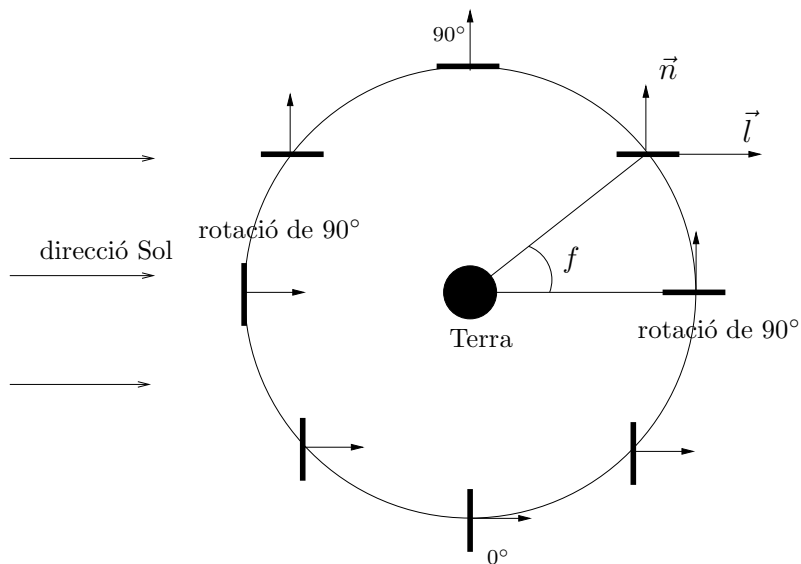


Figura 12: Control On - Off per a una vela solar.

La rotació de 90° s'haurà de fer amb un temps curt en relació al període de l'òrbita per tal d'evitar la pèrdua d'energia, així que s'hauran d'evitar les òrbites de període curt i altitud baixa. A més, com més aprop de la Terra s'estigui l'efecte de fregament amb l'atmosfera i els residus d'aquesta dificultaran els moviments amb la vela.

Hem fet simulacions per a una òrbita inicial circular a 40000 km de la superfície de la Terra i agafant una acceleració característica de 1mm/s^2 durant 5 dies. La Figura 13 ens mostra la variació de l'excentricitat (e), l'angle d'atac (α) i el semieix major (a) respecte el temps i l'òrbita resultant. Podem observar que a mida que augmentem el semieix major l'òrbita es va fent cada cop més el·líptica.

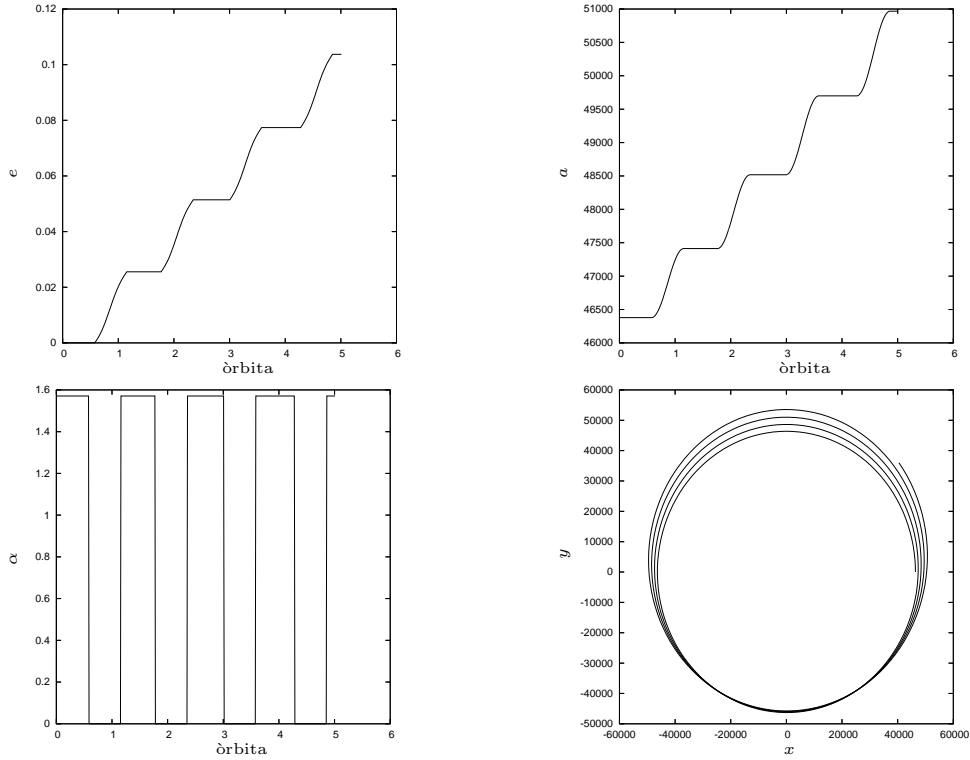


Figura 13: *Control On - Off*, (a) *excentricitat respecte t*, (b) *semieix major respecte t*, (c) *l'angle d'atac respecte t*, (d) *Òrbita descrita per la vela solar*.

L'increment en el semieix major es pot estimar fent servir les equacions de la variació dels elements orbitals vistes a 4.2. Com que estem considerant òrbites inicial circulars i durant algun temps l'excentricitat serà petita (21) es converteix en

$$\frac{da}{df} = \frac{2a^3}{\mu} T(f), \quad (40)$$

on $T(f)$ és la component normal de la pressió solar en el sistema inercial S, T . En aquest cas,

$$\begin{cases} T(f) = 0 & \text{si } 0 \leq f \leq \pi, \\ T(f) = \kappa \cos(f - \frac{3\pi}{2}) & \text{si } \pi \leq f \leq 2\pi. \end{cases} \quad (41)$$

El canvi del semieix major de l'òrbita per un període de temps s'obté integrant (40),

$$\Delta a = \frac{2a^3}{\mu} \int_0^{2\pi} T(f)df. \quad (42)$$

Per tant $\Delta a = \frac{4\kappa a^3}{\mu}$, que depèn fortament de l'òrbita inicial que prenem, a major semieix major, major serà l'increment inicial.

5.2 Control Direccional

En aquesta segona maniobra es fa rotar la vela de manera contínua girant 180° per òrbita. D'aquesta manera es guanya energia no només en la primera mitja òrbita, sinó també quan es va cap al Sol. La variació de l'angle d'atac de la vela està relacionada amb el període de rotació de la següent manera,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \frac{df}{dt}. \quad (43)$$

Si integrem l'equació (43) tenim que l'angle d'atac es defineix com $\alpha = \alpha_0 + f/2$. En les nostres simulacions hem considerat $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$. Tal i com es pot veure en la Figura 14 s'ha de fer una rotació de 180° un cop per òrbita, per tant s'ha de procurar evitar les òrbites d'altitud baixa. Aquest problema es pot solucionar considerant una vela reflectora per les dues cares, d'aquesta manera no s'ha de fer la rotació de 180° ja que les dues cares serveixen.

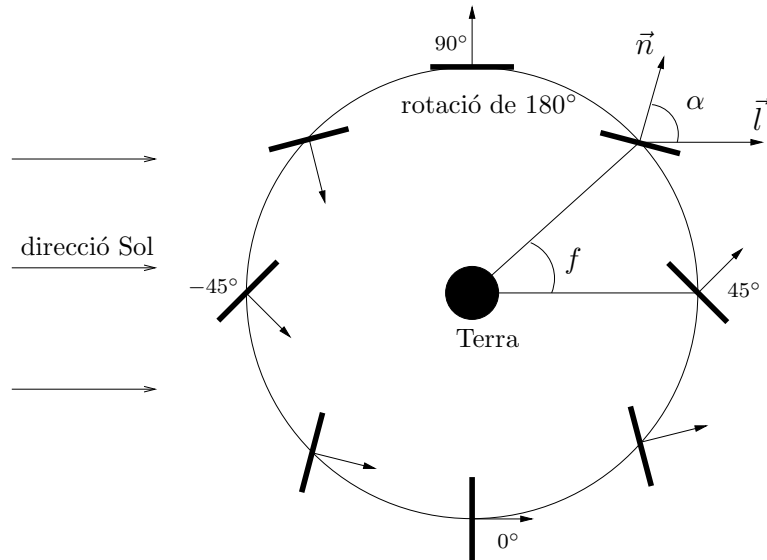


Figura 14: Control direccional per una vela solar.

A la Figura 15 podem veure la variació respecte el temps del semieix major, l'excentricitat, l'angle d'atac i l'òrbita que surt, considerant les mateixes condicions inicials

que en 5.1. També observem que a mida que va passant el temps l'òrbita es va fent cada cop més el·líptica.

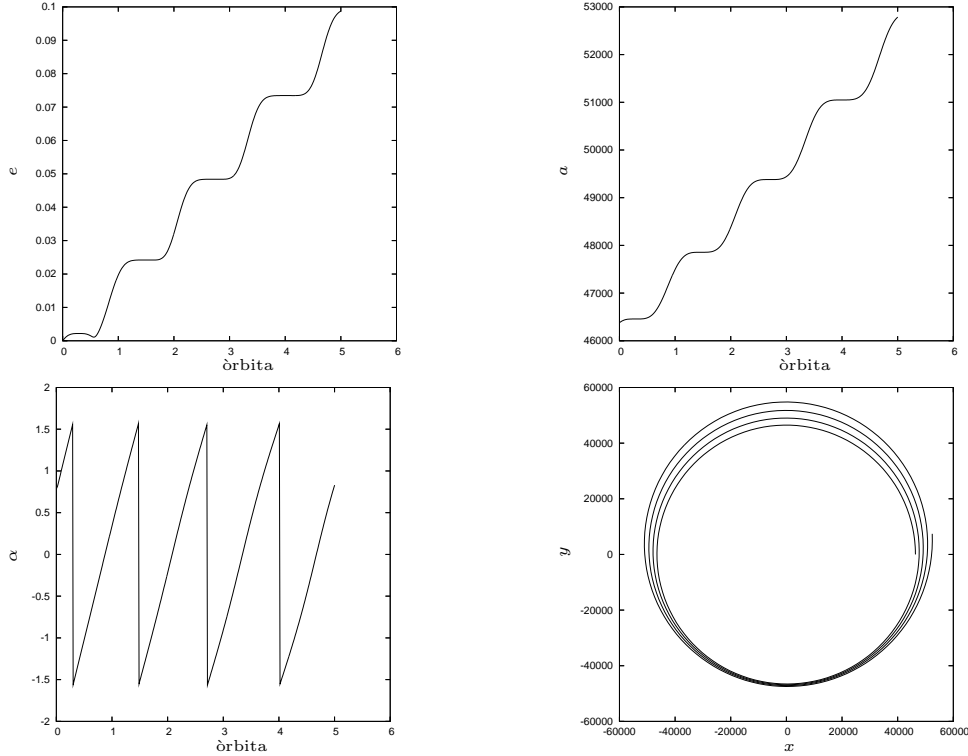


Figura 15: *Control direccional, (a) excentricitat respecte t , (b) semieix major respecte t , (c) angle d'atac respecte t , (d) Òrbita descrita per la vela solar.*

Com abans es pot veure quina és la variació del semieix major sobre un període de l'òrbita. Ara

$$T(f) = \kappa \left| \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{f}{2}\right) \right| \text{ per } 0 \leq f \leq 2\pi. \quad (44)$$

Si s'integra (40),

$$\Delta a = \frac{16\kappa}{3\mu} a^3. \quad (45)$$

5.3 Optimització del Control Direccional

Les dues maniobres presentades han provat la seva eficiència i la possibilitat d'escapar-se de la Terra. Però ara s'intenta millorar aquests resultats maximitzant el guany d'energia instantani, que es creu que farà disminuir el temps d'escapament. Per tant s'ha de saber quin és l'angle que maximitza el canvi d'energia instantani.

Sigui \vec{v} un vector unitari en la direcció de la velocitat i sigui φ l'angle entre aquest i la direcció del Sol. Sigui α l'angle d'atac, \vec{n} el vector normal a la vela i \vec{l} la direcció

del Sol, tots dos vectors unitaris tal i com es veu a la Figura 16.

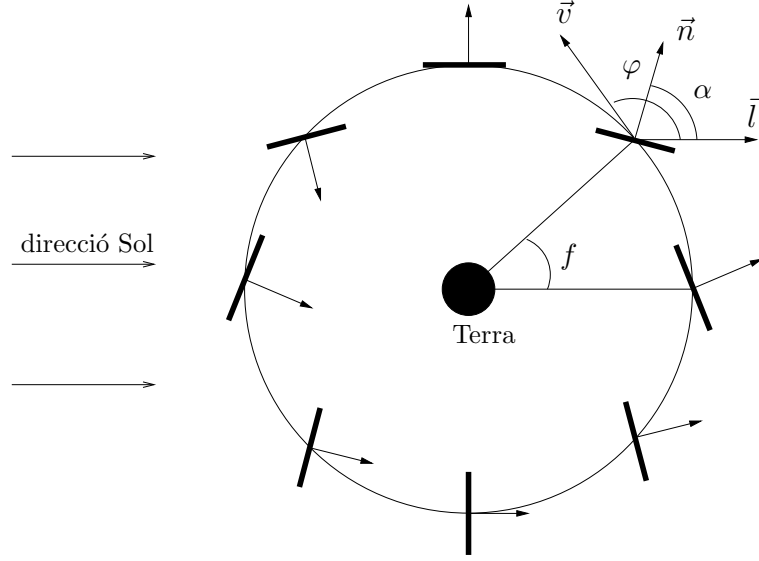


Figura 16: *Optimització del control direccional per una vela solar.*

Si es considera el producte escalar entre les equacions del moviment (17) i el vector velocitat

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \vec{v} + \mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r^3} = k \langle \vec{l}, \vec{n} \rangle^2 \vec{n} \cdot \vec{v}, \quad (46)$$

s'observa que la part esquerra de l'equació (46) es pot reescriure com

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \vec{v} + \mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r^3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \frac{\mu}{r} \right), \quad (47)$$

que és la variació de l'energia total (E). Per tant la variació d'energia ve donada per,

$$\frac{dE}{dt} = k \langle \vec{l}, \vec{n} \rangle^2 \vec{n} \cdot \vec{v}. \quad (48)$$

Com estem suposant que la direcció del Sol és fixe ($\vec{l} = (1, 0)$), si φ és l'angle del vector velocitat ($\vec{v} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$), el vector normal és $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ i llavors,

$$\langle \vec{l}, \vec{n} \rangle^2 \vec{n} \cdot \vec{v} = \cos^2 \alpha \cos(\varphi - \alpha). \quad (49)$$

Es vol trobar l' α que maximitza $\frac{dE}{dt}$, així que es deriva respecte α i es busquen els zeros.

$$E_t(\alpha) = \kappa \cos^2 \alpha \cos(\varphi - \alpha), \quad (50)$$

i llavors,

$$\frac{dE_t}{d\alpha}(\alpha) = \kappa \cos \alpha (-2 \sin \alpha \cos(\varphi - \alpha) + \cos \alpha \sin(\varphi - \alpha)). \quad (51)$$

Així que $\frac{dE_t}{d\alpha} = 0$ si i només si (a) $\cos \alpha = 0$ ó (b) $-2 \sin \alpha \cos(\varphi - \alpha) + \cos \alpha \sin(\varphi - \alpha) = 0$. Observem que si $\cos \alpha_0 = 0$ llavors $E_t(\alpha_0) = 0$, per aquests α_0 no ens serà possible guanyar energia, per tant volem els α_1 que fan que (b) sigui zero. Usant les identitats trigonomètriques (36) i reajustant les variables podem reescriure (b) com $-\frac{3}{2} \sin(2\alpha - \varphi) - \frac{1}{2} \sin \varphi$. Per tant,

$$-\frac{3}{2} \sin(2\alpha - \varphi) - \frac{1}{2} \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \sin(2\alpha - \varphi) = -\frac{\sin \varphi}{3}. \quad (52)$$

Sabent que $\sin \beta = \sin(\pi - \beta)$ es pot trobar per cada φ l' α que satisfaci (52):

1. $\sin(2\alpha - \varphi) = -\frac{\sin \varphi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} (\varphi + \arcsin(-\frac{\sin \varphi}{3})) + k\pi$.
2. $\sin(\pi - 2\alpha + \varphi) = -\frac{\sin \varphi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} (\varphi - \arcsin(-\frac{\sin \varphi}{3})) + \frac{(2k-1)\pi}{2}$.

S'ha d'escollir el k tal que $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i maximitzi (50). Observem que si $E_t(\alpha^*) > 0$ l'energia augmenta i per tant tindrem un màxim i si $E_t(\alpha^*) < 0$ l'energia decreix i tenim un mínim, si en canvi $E_t(\alpha^*) = 0$ l'energia es mantindrà igual. Hi ha casos en els quals $E_t(\alpha) \leq 0$ fent impossible maximitzar l'energia, en aquest casos escollirem l' α que manté l'energia constant.

A la Figura 17 podem veure els resultats per aquesta tercera maniobra, on igual que abans podem veure l'òrbita resultant i la variació de l'excentricitat, el semieix major i l'angle d'atac respecte el temps.

Si es mira la variació del semieix major amb aquesta elecció de l'angle, tenim que

$$T(f) = \kappa \cos^2 \alpha^* |\sin(\alpha^* - f)| \text{ for } 0 \leq f \leq 2\pi. \quad (53)$$

Integrant (40) s'obté

$$\Delta a = \frac{5.52\kappa}{\mu} a^3. \quad (54)$$

5.4 Conclusions

En aquest apartat s'ha pogut veure tres maniobres per escapar de la Terra. En totes tres es pot veure que a mida que augmenta el semieix major les òrbites es fan més el·líptiques.

S'ha fet una estimació analítica de l'augment del semieix major i podem observar que les tres depenen fortament del semieix de l'òrbita inicial. Però de totes tres

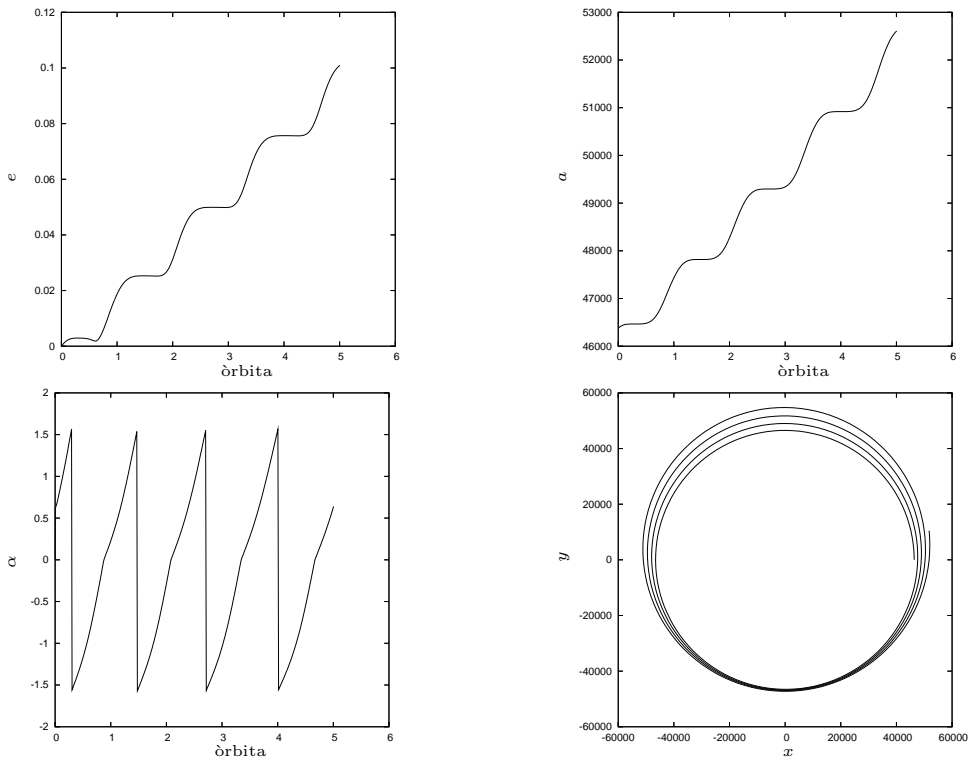


Figura 17: *Optimització del control direccional, (a) excentricitat respecte t , (b) semieix major respecte t , (c) angle d'atac de la vela respecte t , (d) Òrbita descrita per la vela solar.*

l'optimització del control direccional obté els millors resultats i per tant és la millor elecció.

També hem fet unes simulacions per estimar el temps d'escapament per a les tres maniobres. Hem considerat que ens escapem de la Terra quan l'energia (h) és positiva, i.e. el moviment relatiu Terra - Vela és hiperbòlic. S'observa que la maniobra que optimitza el control direccional necessita aproximadament 71 dies per escapar de la Terra mentre que el control direccional en necessita uns 285. El control On - Off es queda bastant enrere necessitant prop més d'un any per escapar. A les figures 18, 19 i 20 podem veure les òrbites resultants per a les tres maniobres. En elles podem veurem la variació de l'excentricitat i l'energia respecte el temps i les òrbites resultants.

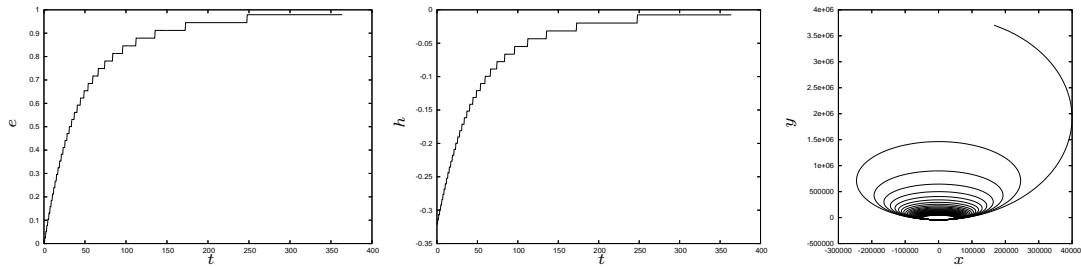


Figura 18: *Control On - Off*, (a) variació de l'excentricitat respecte el temps, (b) variació de l'energia respecte el temps i (c) l'òrbita resultant.

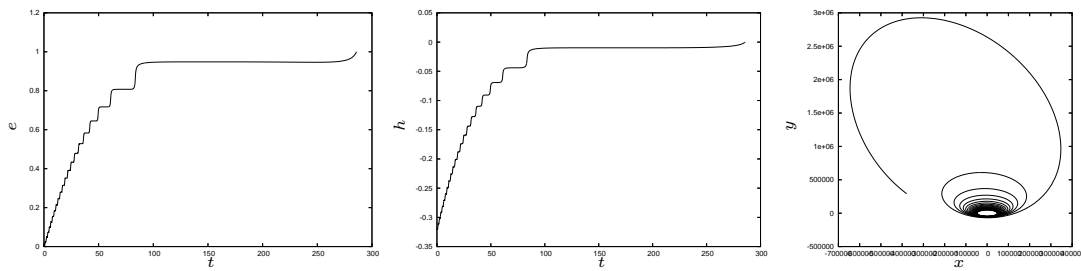


Figura 19: *Control direccional*, (a) variació de l'excentricitat respecte el temps, (b) variació de l'energia respecte el temps i (c) l'òrbita resultant.

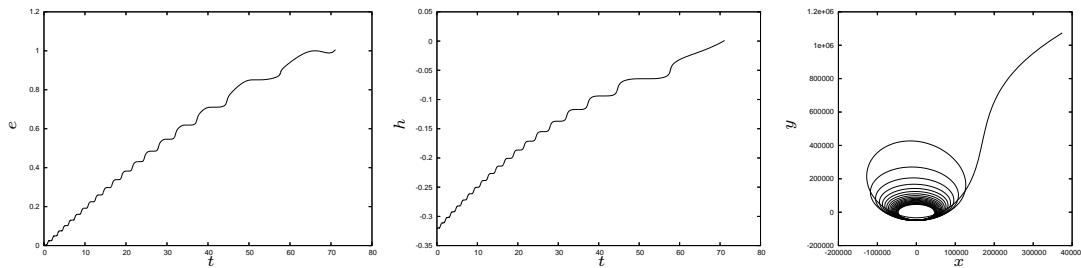


Figura 20: *Control direccional òptim*, (a) variació de l'excentricitat respecte el temps, (b) variació de l'energia respecte el temps i (c) l'òrbita resultant.

6 Dinàmica Natural del Problema

En aquesta secció hem intentat entendre la dinàmica quan l'angle de la vela és fix i no es fa cap mena de control sobre el satèl·lit. Usarem com a model les equacions presentades a la secció 4.3. Recordem que les equacions (38), (39) es poden veure com una pertorbació del RTBP o el Problema Restringit Bicircular (BCP).

És ben sabut que el RTBP té 5 punts d'equilibri (L_i), tres sobre l'eix de les x 's i dos formant un triangle equilàter amb els dos primaris [18]. Els tres col·lineals són linealment inestables (centre×sella), i els equilàters són linealment estables (centre×centre). Si pertorbem aquest model amb l'efecte del Sol, ja sigui amb la seva massa (BCP) o bé amb la radiació solar (BCPS) i aquesta no és molt gran, els punts fixes esdevindran òrbites periòdiques. Així que buscarem quines són les òrbites que ens apareixen en els nostres models i la seva estabilitat.

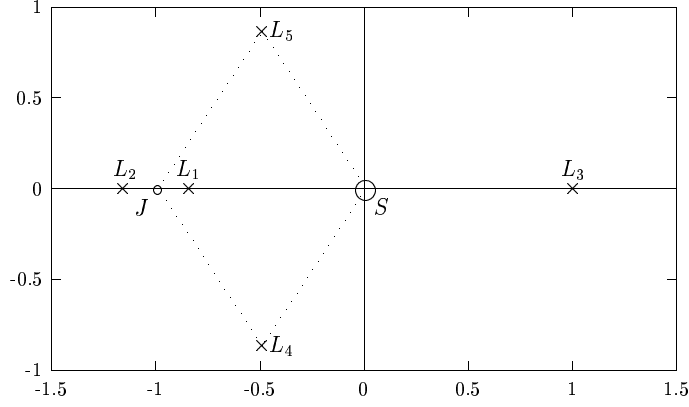


Figura 21: Posició dels cossos i els punts d'equilibri en el RTBP en coordenades sinòdiques.

Considerem la secció de Poincaré:

$$P_{\varepsilon, \kappa, \alpha} : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad (55)$$

$$(x, \varepsilon, \kappa, \alpha) \mapsto \phi_{\tau}(t; x, \varepsilon, \kappa, \alpha),$$

on $\tau = 2\pi/\omega_s$ és la freqüència de la pertorbació. Sigui $\phi_{\tau}(t; x, \varepsilon, \kappa, \alpha)$ el flux definit pel sistema Hamiltonià (39):

$$H_{BCPS} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_{PE}} - \frac{\mu}{r_{PM}} -$$

$$\varepsilon m_s \left(\frac{1}{r_{PS}} - \frac{y \sin(\omega_s t) - x \cos(\omega_s t)}{a_s^2} \right) -$$

$$\kappa \cos^2 \alpha (y \sin(\omega_s t - \alpha) - x \cos(\omega_s t - \alpha)),$$

on κ és l'efectivitat de la vela, α és l'angle d'atac de la vela i ε fa referència a la massa del Sol.

Com podem observar hi ha tres variables per jugar ε , κ i α , amb $\varepsilon \in [0, 1]$, $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ i $\kappa \in [0, \kappa_f]$. Observem que si $\varepsilon = \kappa = 0$ ó $\varepsilon = 0$ i $\alpha = \pm\pi/2$ l'efecte del Sol és menyspreat i tenim el RTBP, per al qual coneixem els seus punts fixes. En les simulacions fetes a la secció 5 hem usat veles que tenen una acceleració característica de 1mm/s^2 , que en les unitats que tenim pel sistema Hamiltonià correspon a $\kappa_f = 0.36755365918$.

Començarem buscant les òrbites periòdiques que existeixen afegint l'efecte gravitatori del Sol (i.e. $\varepsilon = 1$) i mantenint l'efecte de la vela al marge (i.e. $\kappa = 0$ ó $\alpha = \pm\pi/2$). Hem usat un mètode de continuació per a la funció $P_{\varepsilon,0,0}(x, \varepsilon)$ variant ε de 0 a 1, aplicat als punts fixes L_1, L_2 i L_4 , els dos col·lineals més propers a la Lluna i un dels punts triangulars. Hem escollit aquests punts ja que per les simetries del problema el comportament al voltant de L_4 i L_5 és el mateix i L_3 té poc interès en el disseny de missions espacials.

Un cop tinguem les òrbites periòdiques que hi ha en el Problema Restringit Bicircular (BCP), afegirem l'efecte de la vela i estudiarem les òrbites periòdiques que existeixen si mantenim la inclinació de la vela (α) fixe durant el període total de l'òrbita.

Cal mencionar que degut a la forta inestabilitat dels punts col·lineals (L_1, L_2) hem usat un tir paral·lel en el càlcul d'aquestes (veure Apèndix C).

6.1 Comportament al voltant de L_1

Com ja hem dit hem començat buscant quines són les òrbites periòdiques que hi ha al voltant de L_1 en el BCP. Aquestes són les òrbites que prendrem com a condicions inicials per a buscar les òrbites periòdiques que existeixen quan afegim l'efecte de la vela. A la Figura 22 podem veure la continuació de les òrbites periòdiques del RTBP ($\varepsilon = 0$) al BCP ($\varepsilon = 1$). Aquestes òrbites són totes linealment inestables (centre \times sella).

Un cop tenim l'òrbita periòdica que hi ha al voltant de L_1 per al BCP afegim l'efecte de la vela i mirem per a quins paràmetres existeixen òrbites. Aquestes depenen de dos paràmetres, l'angle d'atac (α) i l'efectivitat de la vela (κ), llavors fixarem un dels dos paràmetres i continuarem respecte l'altre per a buscar aquestes òrbites.

6.1.1 Continuant respecte l'efectivitat de la vela κ

Hem pres com a condició inicial per al nostre mètode de continuació l'òrbita periòdica de la Figura 22 i fixarem un cert angle d'atac (α) i continuarem respecte l'efectivitat de la vela (κ). Durant la continuació també estudiarem l'estabilitat d'aquestes. Hem fet els càlculs per a diferents angles per a veure com es comporten respecte aquest.

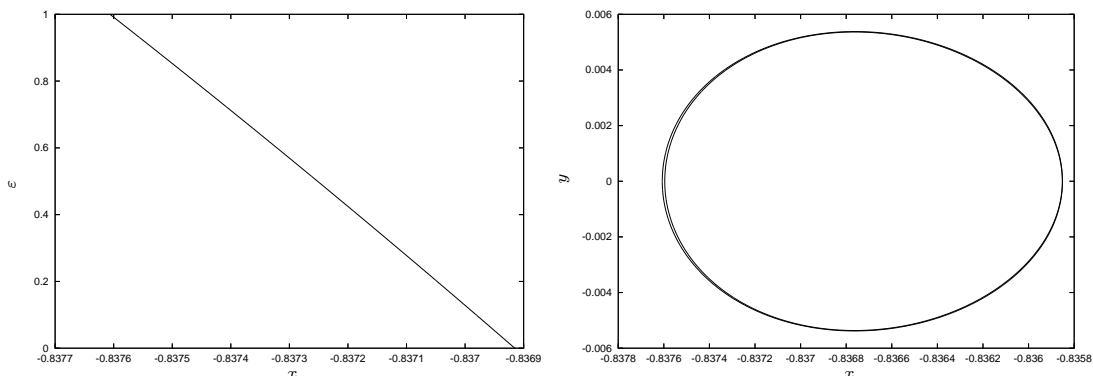


Figura 22: (Esquerra) Continuació de les òrbites periòdiques del RTBP al BCP al voltant de L_1 . (Dreta) Òrbita periòdica al voltant de L_1 en el BCP.

A la Figura 23 (esquerra) podem veure el resultat per a $\alpha = 0^\circ, 20^\circ$ i 30° , per aquests angles no arribem a trobar òrbites periòdiques per a $\kappa = \kappa_f$. Això es deu a que la força de la vela és més forta que la força d'atracció de la Terra i la Lluna, fent que les òrbites s'escapin.

A Figura 23 (dreta) podem veure les òrbites resultants per a $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$ i 80° . En aquests casos sí existeixen òrbites periòdiques per a $\kappa = \kappa_f$. Podem intentar continuar respecte l'angle per a κ fixats per a veure quin és l'angle màxim per al qual és possible trobar òrbites periòdiques.

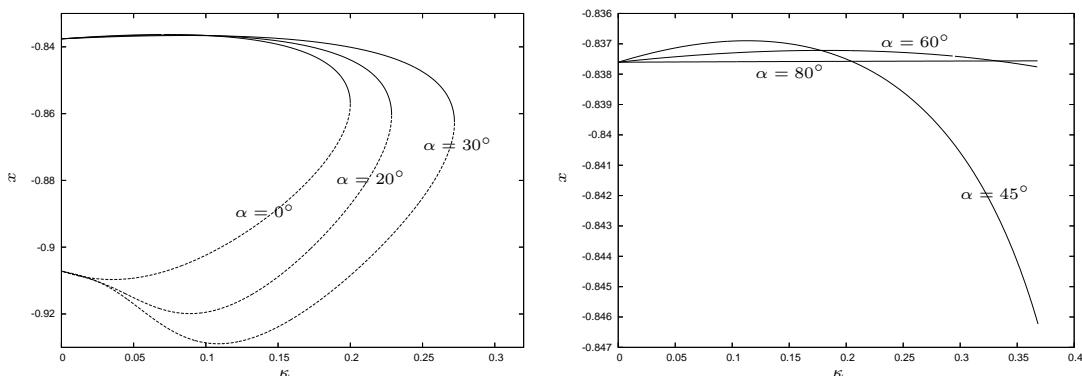


Figura 23: (Esquerra) Continuació de les òrbites periòdiques del BCP al BCPS al voltant de L_1 per a $\alpha = 0^\circ, 20^\circ$ i 30° . (Dreta) Continuació de les òrbites periòdiques del BCP al BCPS al voltant de L_1 amb $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$ i 80° . La línia contínua representa les òrbites centre \times sella i la discontinua les sella \times sella.

També hem estudiat l'estabilitat de les òrbites periòdiques resultants, quan $\alpha = 0^\circ, 20^\circ$ i 30° trobem canvis d'estabilitat en els punts de retorn, les òrbites passen de centre \times sella a sella \times sella. Per als altres α 's no hi ha canvi d'estabilitat, les òrbites són sempre centra \times sella (Figura 23).

6.1.2 Continuant respecte l'angle d'atac α

Si ara fixem κ i fem variar α podrem veure per quines inclinacions de la vela existeixen òrbites periòdiques per a una vela fixada.

Hem començat amb l'òrbita que hi ha en el model BCP i donada una efectivitat κ fixada variarem l'angle de la vela de 90° fins que ens sigui possible, recordant que $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$.

A la Figura 24 podem veure que per κ 's petits (0.1 i 0.2) existeixen òrbites periòdiques per a qualsevol angle, mentre que quan l'efectivitat de la vela creix això ja no és possible. En aquest cas per a $\kappa = 0.3$ existeixen òrbites periòdiques per a $\alpha \in (34^\circ, 90^\circ]$ i per a κ_f existeixen òrbites periòdiques per a $\alpha \in (40^\circ, 90^\circ]$. En aquest cas la vela genera una força suficient per escapar de l'atracció dels altres cossos, llavors per tal de mantenir-se cal posar la vela lleugerament inclinada per disminuir la seva força.

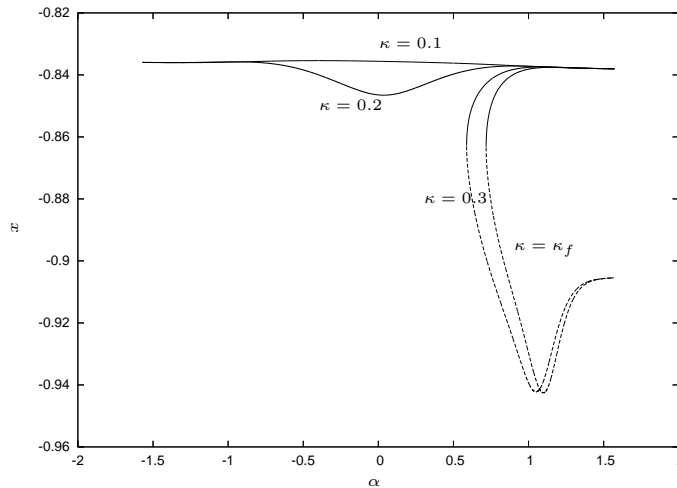


Figura 24: *Continuació de les òrbites periòdiques per a $\kappa = 0.1, 0.2, 0.3$ i κ_f i la seva estabilitat. La línia contínua representa les òrbites centre \times sella i la línia discontinua les sella \times sella.*

Si ens fixem en l'estabilitat de les òrbites periòdiques podem veure com hi ha un canvi d'estabilitat en els punts de retorn per a $\kappa = 0.3$ i κ_f passant de centre \times sella a sella \times sella, mentre que per a $\kappa = 0.1$ i 0.2 les òrbites són sempre centre \times sella tal i com podem veure a la Figura 24.

6.2 Comportament al voltant de L_2

Igual que en l'apartat anterior, per a poder trobar les òrbites periòdiques en el model BCPS necessitem primer conèixer les òrbites periòdiques que hi ha en el BCP.

Hem continuat des del punt fix L_2 en el RTBP ($\varepsilon = 0$) fins al BCP ($\varepsilon = 1$), obtenint el que podem veure en la Figura 25.

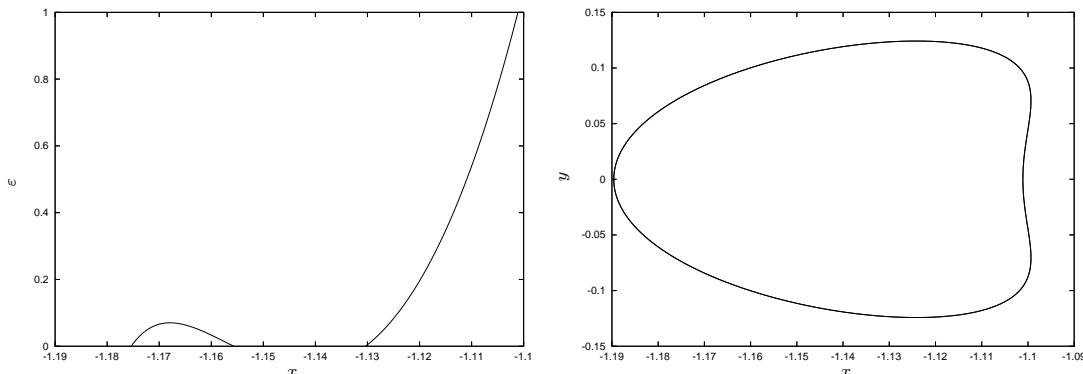


Figura 25: (Esquerra) Continuació de les òrbites periòdiques del RTBP al BCP al voltant de L_2 . (Dreta) Òrbita periòdica al voltant de L_2 per al BCP.

Un cop tenim l'òrbita periòdiques del BCP la podem continuar i veure què és el que passa quan afegim l'efecte de la vela. Tornarem a fixar un dels dos paràmetres α ó κ i farem variar l'altre per veure quines són les òrbites que existeixen.

6.2.1 Continuant respecte l'efectivitat de la vela κ

Igual que abans prenent com a condició inicial l'òrbita periòdica que hi ha al voltant de L_2 pel model BCP (Figura 25 (dreta)), fixarem un angle inicial i continuarem respecte l'efectivitat de la vela. Hem fet els càlculs per als mateixos angles que per L_1 i podem observar resultats similars. Per a $\alpha = 0^\circ, 20^\circ$ i 30° no existeixen òrbites periòdiques per κ_f , mentre sí n'hi ha per a $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$ i 80° tal i com es mostra la Figura 26.

Com abans, mentre hem continuat les òrbites periòdiques hem mirat la seva estabilitat. Per als angles $0^\circ, 20^\circ$ i 30° tenim un canvi d'estabilitat, passant centre×sella a sella×sella tal i com es veu a la Figura 26. En canvi per les òrbites amb $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$ i 80° no hi ha canvi d'estabilitat essent totes centre×sella.

6.2.2 Continuant respecte l'angle d'atac α

Ara volem veure per una κ fixada quin és l'angle màxim per al qual existeixen òrbites periòdiques. Per tant començant amb l'òrbita periòdica del BCP amb $\alpha = 90^\circ$ i fixant κ continuarem respecte l'angle d'atac (α).

Igual que amb L_1 hi ha alguns valors de κ com 0.1 i 0.2 per als quals existeixen òrbites periòdiques per a tots els angles i d'altres com ara 0.3 i κ_f en què existeixen

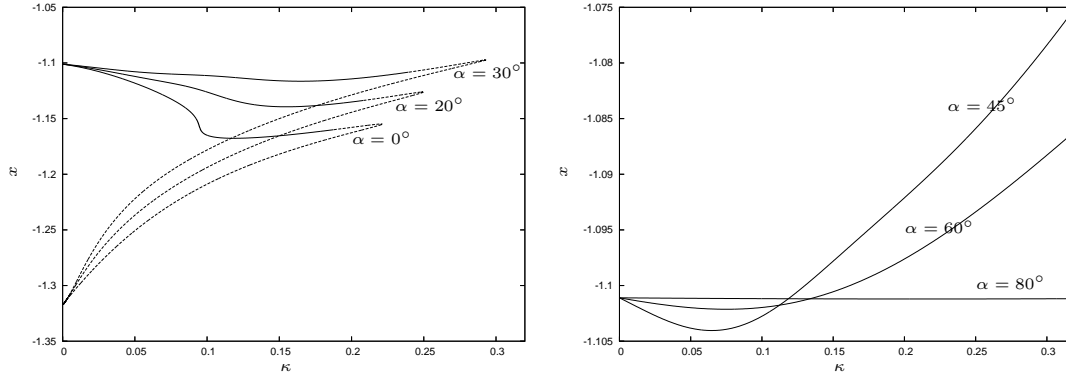


Figura 26: (Esquerra) Continuació de les òrbites periòdiques del BCP al BCPS al voltant de L_1 per a $\alpha = 0^\circ, 20^\circ$ i 30° . (Dreta) Continuació de les òrbites periòdiques del BCP al BCPS al voltant de L_1 amb $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$ i 80° . La línia contínua representa les òrbites centre \times sella i la discontinua les sella \times sella.

només per a $\alpha \in (\alpha_0, 90^\circ]$ tal i com es pot veure en la Figura 27. L'estabilitat de les òrbites periòdiques també es pot veure en aquesta Figura.

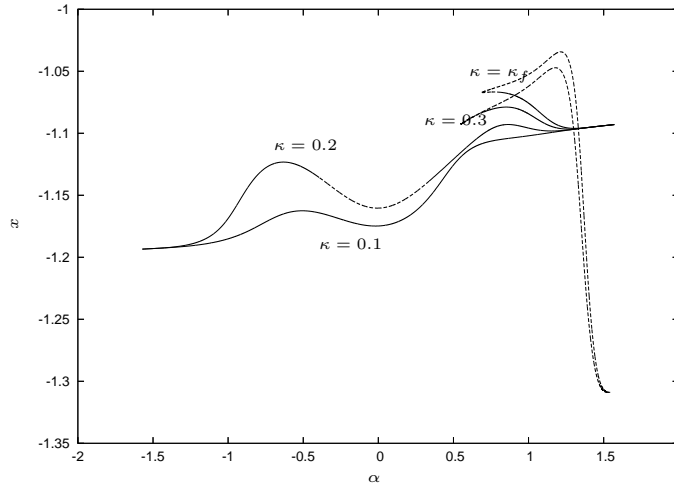


Figura 27: Continuació de les òrbites periòdiques per a $\kappa = 0.1, 0.2, 0.3$ i κ_f i la seva estabilitat. La línia contínua representa les òrbites centre \times sella mentre que la línia discontinua sella \times sella.

6.3 Comportament al voltant de L_4

Per començar continuarem els punts fixes que hi ha al RTBP per veure quines òrbites periòdiques ens apareixen en el BCP tal i com podem observar a la Figura 28. Com podem veure per al BCP al voltant de L_4 hi ha 3 òrbites periòdiques totes elles

inestables. Nosaltres farem servir l'òrbita més propera a L_4 per a les continuacions del BCP al BCPS.

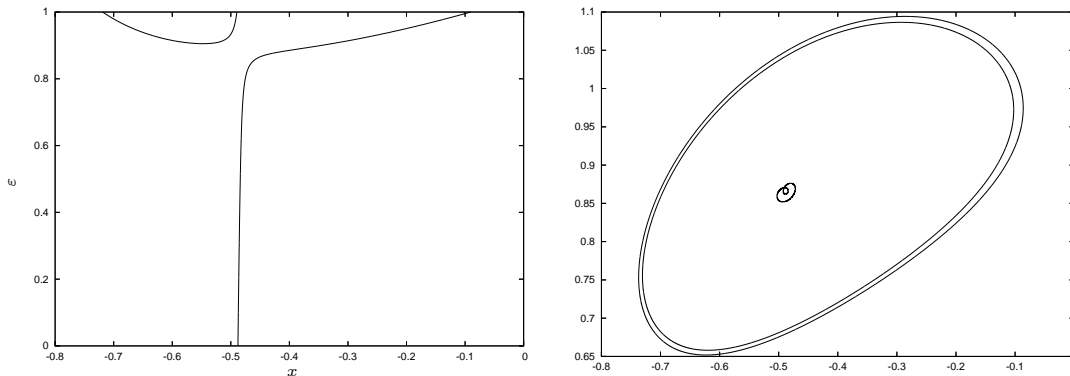


Figura 28: (Esquerra) Continuació de les òrbites periòdiques del RTBP al BCP al voltant de L_4 . (Dreta) Òrbites que hi ha al voltant de L_4 al BCP.

Com ja hem fet amb els altres punts, a partir de l'òrbita periòdica del BCP fixarem un dels dos paràmetres α ó κ i variarem l'altre per a trobar les òrbites periòdiques que existeixen quan afegim l'efecte de la vela.

6.3.1 Continuant respecte l'efectivitat de la vela κ

Ara fixarem diferents angles d'atac α i continuarem respecte l'efectivitat de la vela κ a partir de l'òrbita periòdica més propera a L_4 (28 (dreta)).

Hem fet el mateix per a diferents valors de l'angle $\alpha = 0, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Tal i com podem veure a la Figura 29 (esquerra), no existeixen òrbites periòdiques per a $\kappa = \kappa_f$. Podem observar que a mida que l'angle augmenta, i per tant l'àrea projectada que té la pressió solar disminueix, trobem òrbites periòdiques per a valors més grans de κ .

Hem provat també per a $\alpha = 85^\circ, 86^\circ, 87^\circ$ aquí sí existeixen òrbites periòdiques per a $\kappa = \kappa_f$ tal com es pot veure a la Figura 29 (dreta).

Hem estudiat també l'estabilitat per aquestes òrbites i per als primers casos $\alpha = 0, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, hi ha un canvi d'estabilitat en els punts de retorn tal i com es veu a la Figura 29, on la primera part de les òrbites periòdiques que trobem són inestables (centre \times sella) mentre que l'altra meitat són estables (centre \times centre). Per als angles en què existeixen òrbites per $\kappa = \kappa_f$ no hi ha canvi d'estabilitat, totes les òrbites són inestables (centre \times sella).

Un canvi en l'estabilitat moltes vegades dóna lloc a una bifurcació i algunes branques poden aparèixer. Però aquest no és el cas.

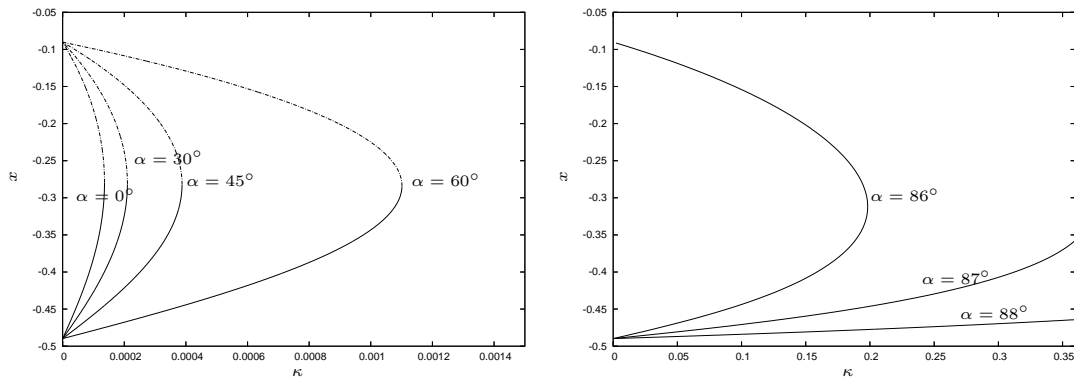


Figura 29: (Esquerra) Continuació de les òrbites periòdiques per $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ i 60° . (Dreta) Continuació de les òrbites periòdiques per $\alpha = 85^\circ, 86^\circ$ i 87° . La línia contínua representa les òrbites inestables mentre que la línia discontinua representa les òrbites estables.

6.3.2 Continuant respecte l'angle d'atac α

Ara fixem κ i fem variar α per a veure si d'aquesta manera som capaços de trobar més òrbites periòdiques per a κ_f . Començarem amb $\alpha = 90^\circ$ i per tant l'efecte de la vela queda anul·lat. Aquí les òrbites periòdiques que apareixen són les del BCP i a partir d'elles les podem continuar. El mateix es pot fer per a $\alpha = -90^\circ$, i degut a les simetries del problema obtenim situacions similars.

Les simulacions fetes són per a $\kappa = 0.1, 0.2, 0.3, \kappa_f$. Podem veure que com més petita és κ hi ha més angles per als quals existeixen òrbites periòdiques.

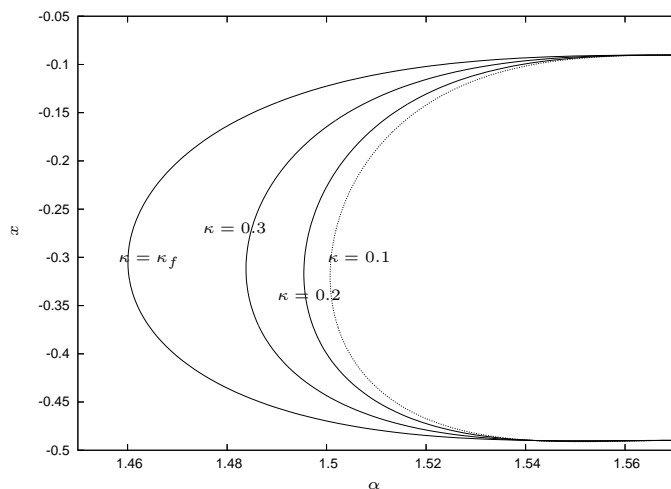


Figura 30: Continuació per a valors de $\kappa = 0.1, 0.2, 0.3, \kappa_f$.

També hem estudiat la seva estabilitat i no apareixen canvis.

6.4 Conclusions

Les gràfiques que observem en els tres casos són diferents, però mostren resultats similars. En tots tres casos quan continuem respecte κ , per a angles petits no existeixen òrbites periòdiques per $\kappa = \kappa_f$, tot i així al voltant de L_1 i L_2 existeixen òrbites periòdiques per a κ 's molt més grans que no pas al voltant de L_4 . Per exemple, per L_1 i L_2 per $\alpha = 30^\circ$ existeixen òrbites periòdiques per $\kappa \approx 0.26$ a L_1 i $\kappa \approx 0.29$ a L_2 , en canvi, al voltant de L_4 per $\alpha = 30^\circ$ només existeixen òrbites periòdiques fins a $\kappa \approx 3.9 \cdot 10^{-4}$. Per L_4 hem de prendre $\alpha = 86^\circ$ per a que existeixin òrbites periòdiques per a $\kappa \approx 0.2$.

Com que el punt L_4 és estable qualsevol força allà és important i per quedar-nos al voltant necessitem veles poc eficients o considerar angles per la vela propers a 90° anul·lant quasi tot l'efecte d'aquesta. En canvi L_1 i L_2 són inestables i necessitarem veles més efectives per a maniobrar, permetent-nos prendre angles més petits aprofitant al màxim l'efecte de la vela.

Si mirem els resultats obtinguts fixant κ i variant l'angle d'atac α podem observar els mateixos resultats. En aquest cas veurem per una efectivitat de la vela (κ) fixada els angles possibles per als quals existeixen òrbites periòdiques. Al voltant de L_1 i L_2 , per a $\kappa = 0.1$ i 0.2 existeixen òrbites periòdiques per a tots els angles mentre que per a $\kappa = 0.3$ i κ_f hi ha alguns angles per als quals això no és possible. A mida que l'efectivitat de la vela va augmentant menys són els angles disponibles. En canvi al voltant de L_4 necessitem efectivitats de la vela molt més petites $\kappa \approx 2 \cdot 10^{-4}$ per a tenir òrbites periòdiques per tots els angles.

Amb tot això podem concloure que al voltant de L_4 es necessiten veles molt poc efectives per a quedar-se orbitant a la vora, mentre que al voltant de L_1 i L_2 sí que és necessària més efectivitat. Les òrbites que hem trobat són inestables (centre×sella), haurem de trobar alguna maniobra de control per a no allunyar-nos. Hauríem de veure si existeix alguna amb la vela que ens permeti quedar-nos-hi, fent que aquesta deixi de tenir el seu caràcter inestable.

A Existència d'Òrbites Periòdiques al Voltant de L_i

A la secció 4 hem vist que el BCPS es pot veure com una pertorbació del RTBP. Per tant els punts de libració L_i ja no són fixes sinó òrbites periòdiques. Això és degut al Teorema de la Funció Implícita tal i com es pot veure el la següent proposició.

Proposició 1. *Sigui*

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t), \quad (56)$$

una EDO, on $g(x, t)$ és una funció amb una dependència periòdica del temps ($g(x, t) = g(x, t + 2\pi)$), i sigui $x = 0$ un punt fix de $f(x)$.

Si $\mu i \notin \text{Spec}\{D_x f(0)\}$ amb $\mu \in \mathbb{Z}$, llavors existeix un ε_0 tal que $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, (56) té una única òrbita periòdica de període 2π .

Demostració:

Sigui $P_\varepsilon(x)$ la secció de Poincaré a temps 2π :

$$\begin{aligned} P_\varepsilon &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto P_\varepsilon(x) = \phi_{2\pi}(x) \end{aligned} \quad (57)$$

i considerem l'equació

$$P_\varepsilon(x(\varepsilon)) - x(\varepsilon) = 0. \quad (58)$$

Per $\varepsilon = 0$, $x(0)$ tenim una solució del sistema. Ens agradaria estendre aquesta solució per a diferents valors de ε .

Si derivem (58) respecte ε ,

$$D_x P_\varepsilon(x(\varepsilon))x'(\varepsilon) + D_\varepsilon P_\varepsilon(x(\varepsilon)) - x'(\varepsilon) = 0$$

\Downarrow

$$(D_x P_\varepsilon(x(\varepsilon)) - Id)x'(\varepsilon) = -D_\varepsilon P_\varepsilon(x(\varepsilon)).$$

Per tant si $D_x P_\varepsilon(x(\varepsilon)) - Id$ és invertible per $\varepsilon = 0$ també ho serà per algun $\varepsilon < \varepsilon_0$. Sent capaços de trobar solucions de (58) per ε . Observem que això és possible si i només si $1 \notin \text{Spec}\{D_x P_0(x(0))\}$.

És sabut que si $\dot{x} = f(x)$ les equacions variacionals satisfan $\dot{M} = [D_x f(x)]M$. Per tant $D_x P_0(0) = e^{D_x f(0)2\pi}$ és la diferencial de l'aplicació de Poincaré. Si $\lambda \in \text{Spec}\{D_x P_0(x(0))\} \Rightarrow \exists \mu \in \text{Spec}\{D_x f(0)\}$ t.q $\lambda = e^{2\pi\mu}$, llavors $\lambda = 1 \Leftrightarrow 2\pi\mu \in 2\pi i\mathbb{Z}$, i per tant $\mu \in i\mathbb{Z}$.

□

En el nostre cas la secció de Poincaré inicial ve donada per les equacions del RTBP i els valors propis al voltant dels punts L_i són complexos i per tant podem aplicar aquest fet.

B El Mètode de Continuació

Suposem que volem resoldre $f(x, \lambda) = 0$ on $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in I$ i $f(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n$. Com que no tenim una única solució, hi ha una corba de solucions a l'espai (x, λ) . Volem tenir una aproximació d'aquesta corba i per tant hem de ser capaços de trobar punts sobre ella. Per a fer això farem servir un mètode de continuació amb un pas de predicció i un de correcció.

B.1 El Mètode de Predicció

Suposem que tenim calculats uns quants punts de la corba i desitgem predir un nou punt per tal de poder refinar amb un Newton. El més usual és prendre el vector tangent a la corba \vec{v}_{tg} i avançar un cert pas (s) en aquella direcció. Sigui y_m l'últim punt calculat, considerarem com a nova condició inicial $\hat{y}_{m+1} = y_m + s\vec{v}_{tg}$. Veure Figura 31.

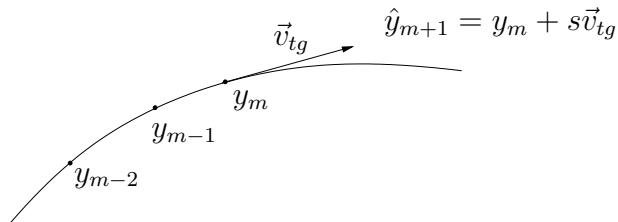


Figura 31: *Predicció mitjançant el vector tangent.*

Moltes vegades el càlcul de \vec{v}_{tg} pot ser complicat, en aquests casos podem prendre com a aproximació d'aquest $\vec{v} = y_m - y_{m-1}$. Així, en aquests casos considerarem com a condició inicial $\hat{y}_{m+1} = y_m + s\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Veure Figura 32.

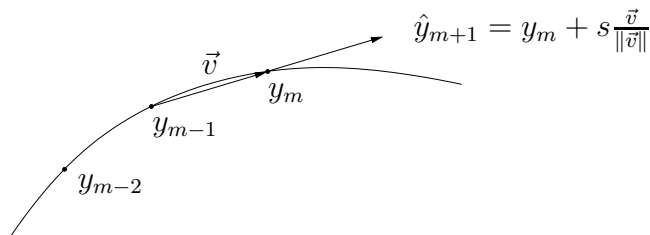


Figura 32: *Predicció prenent una aproximació del vector tangent.*

L'elecció del pas s està relacionada amb el comportament de la corba i la precisió que estiguem buscant. De vegades és convenient usar un control de pas, per a escollir el pas que millor s'escaigui en cada punt de la corba.

B.2 El Mètode de Correcció

Suposem que el mètode de predicció ens ha donat una condició inicial $z_0 = (x_0, \lambda_0)$ tal que $f(z_0)$ és petit, el que volem és trobar una correcció h_0 tal que $f(z_0 + h_0) = 0$. Si prenem el desenvolupament de Taylor:

$$f(z_0 + h_0) = f(z_0) + D_x f(z_0)h_0 + O(\|h_0\|^2) = 0, \quad (59)$$

ometent els termes de segon ordre,

$$D_x f(z_0)h_0 = -f(z_0), \quad (60)$$

es redueix el nostre problema a resoldre un sistema lineal. Observem que $D_x f \in \mathcal{M}_{n \times (n+1)}$, així que buscarem la solució de norma mínima, d'aquesta manera tindrem una única solució i estarem trobant una solució que ens permetrà anar avançant en la direcció que estem continuant. Com que hem menyspreat els termes de segon ordre $f(z_0 + h_0) \neq 0$, però serà una millor aproximació ja que $f(z_0 + h_0) = o(h^2)$. Iterant aquest procés:

$$y_k = y_{k-1} + h_k, \quad (61)$$

$$D_x f(y_{k-1})(h_k) = -f(y_{k-1}).$$

Pararem el mètode quan $\|f(y_k)\|$ ó $\|h_k\|$ sigui prou petit.

Encara ens resta saber com podem trobar la solució de norma mínima de (60). Suposem que tenim un sistema lineal qualsevol $Ax = b$ amb $A \in \mathcal{M}_{n \times (n+1)}$, $\text{rang}(A) = n$ i $b \in \mathbb{R}^n$. Si tenim una solució particular p i un element del nucli v , l'espai de solucions està parametrizat per $q = p + \gamma v$. Si el que volem és la solució de norma mínima cal que $\langle v, q \rangle = 0$.

$$\langle v, p \rangle + \gamma \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{\langle v, p \rangle}{\langle v, v \rangle}. \quad (62)$$

Per tant tot es redueix a trobar una solució particular (p) i un element del nucli (v). Primer aplicarem una transformació de Gauss a la matriu del sistema per tal de tenir una matriu triangular,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Com que $\text{rang}(A) = n$ tenim que $a_{n,n}$ ó $a_{n,n+1}$ són diferents de zero, suposem doncs que $a_{n,n} \neq 0$. Llavors si considerem $x_{n+1} = 0$ i resolent el sistema

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

tindrem una solució particular del nostre sistema lineal.

Per tal de trobar una solució del nucli farem servir un truc similar, ja que el que volem és trobar una solució de $Ax = 0$. Si ara el que considerem és $x_{n+1} = -1$, resolent el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix},$$

obtenim un element del nucli.

Observem que si $a_{n,n} = 0$ i $a_{n,n+1} \neq 0$ podem fer el mateix realitzant un canvi de columnes ($a_{i,n} \leftrightarrow a_{i,n+1}$).

B.3 Control de Pas

Quan continuem una corba el mètode de continuació necessita un pas s que es pot entendre com una aproximació de la distància entre els punts sobre la corba. Per tal de no tenir problemes mentre estem continuant i perdre informació sobre la corba cal fer un control de pas que tingui present la forma de d'aquesta. Prendrem passos grans quan la corba sigui bastant plana i passos més petits en aproximar-nos a curvatures més pronunciades.

El criteri que hem fet servir és el següent:

- Si Newton triga menys de 2 iterats en convergir incrementarem el pas, prenent $s = 1.5s$.
- Si Newton triga més de 5 iterats en convergir disminuïrem el pas, prenent $s = 0.5s$.
- Si l'angle (α) entre 3 punts successius (y_{m-2}, y_{m-1} i y_m) és més gran que 0.2 disminuïrem el pas ($s = 0.5s$) i refarem el càlcul de y_m .

Cal tenir en compte que en alguns casos podríem anar disminuint el pas (s) de manera indefinida, per tant considerarem un rang d'acció, $s \in [s_{min}, s_{max}]$. En les nostres continuacions hem considerat $s_{max} = 10^{-2}$ i $s_{min} = 10^{-8}$.

C Tir Paral·lel

Degut a la forta inestabilitat al voltant dels punts col·lineals (L_1 i L_2), el càlcul d'òrbites fent secció de Poincaré és difícil, ja que sinó tenim una molt bona aproximació serà molt difícil que Newton convergeixi. Això és degut a que si tenim una condició inicial x_0 que diferencia ε de l'òrbita periòdica x^* ($|x_0 - x^*| = \varepsilon$), llavors en fer secció de Poincaré $|P(x_0) - x^*| = \varepsilon e^{\tau\lambda}$, on λ és el valor propi de mòdul màxim. Com que en aquest cas λ és gran el que passa és que per petit que sigui l'error inicial aquest creix de forma exponencial fent impossible la convergència pel mètode de Newton.

En aquests casos haurem de recórrer a una tècnica alternativa, el tir paral·lel. El tir paral·lel consisteix en dividir la secció de Poincaré en subseccions de Poincaré de manera que el factor que maximitzava l'error inicial no sigui tant gran, en el nostre cas hem pres 4 subseccions, tal i com podem veure a la Figura 33 i llavors trobar una òrbita periòdica serà equivalent a buscar un zero de la funció,

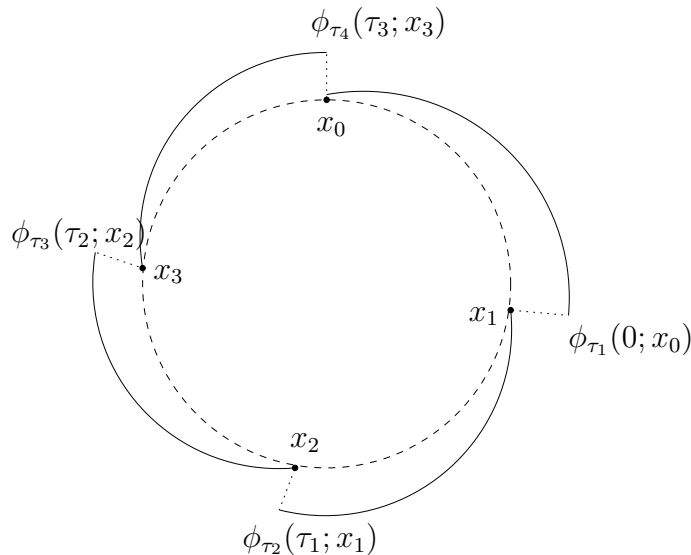


Figura 33: Òrbita per a fer el tir paral·lel.

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_{\tau_1}(0; x_0, \lambda) - x_1 \\ \phi_{\tau_2}(\tau_1; x_1, \lambda) - x_2 \\ \phi_{\tau_3}(\tau_2; x_2, \lambda) - x_3 \\ \phi_{\tau_4}(\tau_3; x_3, \lambda) - x_0 \end{pmatrix}, \quad (63)$$

on $\tau_i = \frac{i\tau}{4}$ $i = 1, \dots, 4$ i λ és un paràmetre, en els nostres casos serà ε , κ ó α , depenent del que estiguem fent en cada moment. $\phi_t(x, \lambda)$ és el flux per $x \in \mathbb{R}^4$ i per tant $\frac{d}{dt}\phi_t(t_0; x, \lambda) = f(\phi_t(t_0; x, \lambda), \lambda)$ amb $\phi_0(t_0; x, \lambda) = x$.

Per a fer continuació necessitarem la diferencial d'aquesta funció i aquesta ve donada per la matriu per blocs,

$$DF = \begin{pmatrix} D\phi_{\tau_1}(0; x_0) & -Id & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_{\tau_1}(0; x_0)}{\partial \lambda} \\ 0 & D\phi_{\tau_2}(\tau_1; x_1) & -Id & 0 & \frac{\partial \phi_{\tau_2}(\tau_1; x_1)}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 & D\phi_{\tau_3}(\tau_2; x_2) & -Id & \frac{\partial \phi_{\tau_3}(\tau_2; x_2)}{\partial \lambda} \\ -Id & 0 & 0 & D\phi_{\tau_4}(\tau_3; x_3) & \frac{\partial \phi_{\tau_4}(\tau_3; x_3)}{\partial \lambda} \end{pmatrix}.$$

Per a discutir l'estabilitat de les òrbites periòdiques ens interessa conèixer la matriu de monodromia de l'aplicació de Poincaré $DP(x^*)$. Aquesta la podem trobar a partir de la matriu diferencial de F tal i com podem veure a continuació.

Lema 1. *Sigui $P(x)$ l'aplicació de Poincaré*

$$P : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x) \longmapsto \phi_{\tau}(0; x) ,$$

i $F(x)$ l'aplicació de tir paral·lel associada a P :

$$F : \mathbb{R}^{16} \longrightarrow \mathbb{R}^{16} \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto (\phi_{\tau_1}(0; x_0) - x_1, \phi_{\tau_2}(\tau_1; x_1) - x_2, \\ \phi_{\tau_3}(\tau_2; x_2) - x_3, \phi_{\tau_4}(\tau_3; x_3) - x_0)$$

on $\tau = \tau_4$.

Llavors,

$$DP(x_0) = D_x \phi_{\tau_4}(\tau_3; x_3) D_x \phi_{\tau_3}(\tau_2; x_2) D_x \phi_{\tau_2}(\tau_1; x_1) D_x \phi_{\tau_1}(0; x_0).$$

Demostració:

Com sabem $\phi_{\tau}(0; x_0) = \phi_{\tau_4}(\tau_3; \phi_{\tau_3}(\tau_2; \phi_{\tau_2}(\tau_1; \phi_{\tau_1}(0; x_0))))$.

Llavors si derivem respecte x i aplicant la regla de la cadena tenim,

$$D\phi_{\tau}(0; x_0) = D_x \phi_{\tau_4}(\tau_3; x_3) D_x \phi_{\tau_3}(\tau_2; x_2) D_x \phi_{\tau_2}(\tau_1; x_1) D_x \phi_{\tau_1}(0; x_0),$$

i per definició $DP(x_0) = D\phi_{\tau}(0; x_0)$. □

Lema 2. Sigui $P(x, \lambda)$ l'aplicació de Poincaré

$$P : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, \lambda) \longmapsto \phi_\tau(0; x, \lambda) ,$$

i $F(x, \lambda)$ l'aplicació de tir paral·lel associada a P :

$$F : \mathbb{R}^{17} \longrightarrow \mathbb{R}^{16} \\ (x_0, x_1, x_2, x_3, \lambda) \longmapsto (\phi_{\tau_1}(0; x_0, \lambda) - x_1, \phi_{\tau_2}(\tau_1; x_1, \lambda) - x_2, \\ \phi_{\tau_3}(\tau_2; x_2, \lambda) - x_3, \phi_{\tau_4}(\tau_3; x_3, \lambda) - x_0)$$

on $\tau = \tau_4$.

Llavors $\frac{\partial \phi_\tau(0; x)}{\partial \lambda} = v_4$, on v_4 ve donada per la recurrència,

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\partial \phi_{\tau_1}(0; x_1)}{\partial \lambda} \\ v_i = D\phi_{\tau_i} v_{i-1} + \frac{\partial \phi_{\tau_i}(\tau_{i-1}; x_{i-1})}{\partial \lambda} \quad i = 2, 3, 4. \end{cases}$$

Demostració:

Com sabem $\phi_\tau(0; x_0, \lambda) = \phi_{\tau_4}(\tau_3; \phi_{\tau_3}(\tau_2; \phi_{\tau_2}(\tau_1; \phi_{\tau_1}(0; x_0, \lambda), \lambda), \lambda), \lambda)$ i ho podem escriure com $X_i = \phi_{\tau_i}(\tau_{i-1}; X_{i-1}, \lambda)$ per $i = 1, 2, 3, 4$ amb $X_0 = x_0$.

Si derivem respect λ i aplicant la regla de la cadena:

$$\frac{\partial X_i}{\partial \lambda} = D_x \phi_{\tau_i}(\tau_{i-1}; X_{i-1}, \lambda) \frac{\partial X_{i-1}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \phi_{\tau_i}(\tau_{i-1}; x_{i-1})}{\partial \lambda},$$

i

$$\frac{\partial X_0}{\partial \lambda} = \frac{\partial \phi_{\tau_1}(0; x_1)}{\partial \lambda},$$

si anomenem $v_i = \frac{\partial X_i}{\partial \lambda}$ per $i = 1, 2, 3, 4$, tenim la recurrència que dèiem per al càlcul de $\frac{\partial \phi_\tau(0; x)}{\partial \lambda}$.

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\partial \phi_{\tau_1}(0; x_1)}{\partial \lambda} \\ v_i = D\phi_{\tau_i} v_{i-1} + \frac{\partial \phi_{\tau_i}(\tau_{i-1}; x_{i-1})}{\partial \lambda} \quad i = 2, 3, 4. \end{cases} ,$$

on,

$$v_4 = \frac{\partial X_4}{\partial \lambda} = \frac{\partial \phi_\tau(0; x)}{\partial \lambda}.$$

□

Així que a partir dels blocs de la matriu DF serem capaços de trobar DP .

Referències

- [1] Bacon, R.H., *Logarithmic Spiral: An Ideal Trajectory for the Interplanetary Vehicle with Engines of Low Sustained Thrust*. American Journal of Physics **27**, 12-18, 1957.
- [2] Castellà, E., *Sobre la dinàmica prop dels punts de Lagrange del sistema Terra-Lluna*, Tesi Doctoral, Universitat de Barcelona, 2003.
- [3] Coverstone, V.L.; Prussing, J.E., *Technique for Escape from Geosynchronous Transfer Orbit Using a Solar Sail*. Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 26, No.4, pp. 628-634. July-August 2003.
- [4] Hartmann, J.W., *Optimal Counter-Intuitive Solar Sail Escape Trajectories*. Preprint. September 2004.
- [5] Hartmann, J.W.; Coverstone, V.L.; Prussing, J.E., *Optimal Counter-Intuitive Solar Sail Escape Trajectories*. 55th International Astronautical Congress 2004, Vancouver - Canada
- [6] Hartmann, J.W.; Coverstone, V.L.; Prussing, J.E., *Optimal Counter-Intuitive Solar Sail Escape Trajectories*. 55th International Astronautical Congress 2004, Vancouver - Canada.
- [7] Hughes, G.W. ; MacDonald, M.; McInnes, C.R., *Analysis of a Solar Sail Mercury Sample Return Mission* 55th International Astronautical Congress 2004, Vancouver - Canada.
- [8] Liepold, M.; Seboldt, W.; Lingner, S.; Borg, E.; Hermann, A.; Pabsch, A.; Wagner, O.; Brückner, J., *Mercury Sun-Synchronous Polar Orbiter with a Solar Sail*. Acta Astronautica Vol. 39 No. 1, pp. 143 - 151. 1996.
- [9] Liepold, M.; Borg, E.; Lingner, S.; Pabsch, A.; Sachs, R.; Seboldt, W., *Mercury Orbiter with a Solar Sail Spacecraft*, Acta Astronautica Vol. 35, Suppl. , pp. 635-644. 1995.
- [10] Macdonald, M. ; Hughes, G., *Solar Sailing Lectures*. Summer Workshop on Advanced Topics in Astrodynamics, 2004.
- [11] Macdonald, M.; McInnes, C.R., *Realistic Earth Escape Strategies for Solar Sailing*. Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.28, No.2,pp. 315-323. March-April 2005.
- [12] McInnes, C.R., *Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications*. Springer-Praxis, Chichester, 1999.

- [13] Modi, V.J; Van der Ha, J.C., *Long-Term Evaluation of three-dimensional Helio-centric Solar Sail Trajectories with arbitrary fixed Sail Setting*. Celestial Mechanics **19** 113-138, 1979.
- [14] Pollard, H., *Celestial Mechanics*. The Carus Mathematical Monographs, No. 18, The Mathematical Association of America. 1976.
- [15] Ressler, K.T., *Design Analysis for Solar Sailing from Geosynchronous Transfer Orbit*. 16th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites.
- [16] Swartwout, M.A., *Earth Escape Using a Slowly Rotating, Doubly Reflective Solar Sail*. Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.28, No. 2, pp. 374-377. March-April 2005.
- [17] Swartwout, M.A., *Earth Escape Using a Slowly Rotating, Doubly Reflective Solar Sail*. 55th International Astronautical Congress 2004, Vancouver - Canada
- [18] Szebehely, V., *Theory of Orbits, The restricted problem of three bodies* Academic Press Inc. 1967.