

# Matemáticas y misiones espaciales. Algunos aspectos de la misión Génesis.

Àlex Haro

Grup de Sistemes Dinàmics

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi  
Facultat de Matemàtiques UB

MATEFEST

Barcelona, 4 de abril de 2006

La aplicación de las Matemáticas a la Mecánica Celeste tiene una larga tradición.

- El **método científico** fue esencial para entender "el sistema del mundo", a finales del siglo XVII. A partir de un modelo matemático, y siguiendo el **método axiomático** (Euclides) se dedujeron las leyes del movimiento de los planetas.  
(Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687)
- El estudio del movimiento de los planetas planteó problemas tan fructíferos que supuso el origen de la **Teoría del Caos**, o Teoría de los Sistemas Dinámicos, a finales del siglo XIX.  
(Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Celeste*, 1892)
- Los métodos de la Teoría de Sistemas Dinámicos son útiles hoy en día para desarrollar complejas misiones espaciales, como la **misión Génesis**.

Un modelo matemático es una aproximación de la realidad, que ha de ser contrastado experimentalmente, y que permite hacer predicciones.

En palabras del matemático húngaro John von Neumann (1903-1957):

*Las ciencias no tratan de explicar y casi no intentan interpretar: se consagran sobre todo a hacer modelos. Por modelo se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas aclaraciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de esa construcción matemática es única y precisamente que sea eficaz.*

# Modelos matemáticos

Un ejemplo: el movimiento de los planetas (I)

- Johannes Kepler (1571-1630), matemático y astrónomo alemán, descubrió que la Tierra y el resto de planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol, **postulando** las tres leyes fundamentales del movimiento planetario.

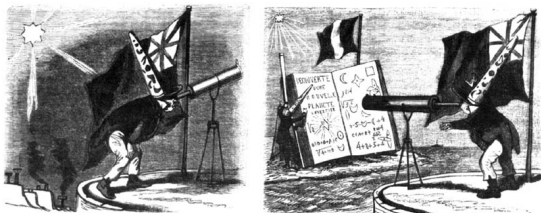


- Isaac Newton (1643 - 1727), matemático, físico y astrónomo inglés, **demostró** las tres leyes de Kepler a partir de las leyes de la dinámica y la **Ley de la Gravitación Universal**.

# Modelos matemáticos

## Un ejemplo: el movimiento de los planetas (II)

- U.J. Le Verrier (1811-1877) y J.C. Adams (1819-1892), independientemente, **predijeron** la existencia de un octavo planeta que alteraba la órbita de Urano, descubierto en 1791.
- El planeta Neptuno fue descubierto por el astrónomo J.G. Galle en 1845, en la posición calculada.

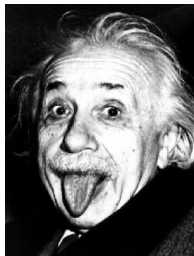


Unas viñetas publicadas en Francia acerca de la controversia sobre el descubrimiento de Neptuno. Adams busca en vano el planeta y lo encuentra en las páginas del libro de Le Verrier.

# Modelos matemáticos

Un ejemplo: el movimiento de los planetas (III)

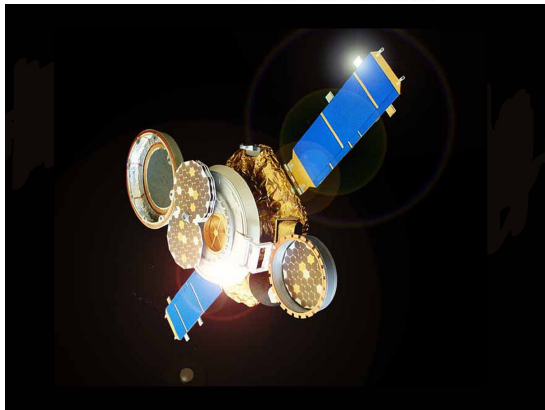
- Le Verrier descubrió en 1855 una **discrepancia** en la órbita de Mercurio, que no era predicha por la teoría Newtoniana de la gravitación.
- Albert Einstein (1879-1955), físico-matemático alemán, corrigió la teoría de la gravitación en 1915, con su **Teoría General de la Relatividad**, explicando la órbita de Mercurio.



# La misión Génesis

La búsqueda de los orígenes

## GENESIS SEARCH FOR ORIGINS



# La misión Génesis

## Objetivo científico

Obtener muestras de viento solar, que ayudarán a los científicos a responder cuestiones relacionadas con la Teoría de Evolución Estelar y, en particular, de nuestro **Sistema Solar**.

- ¿De qué está hecho el Sol?
- ¿Están hechas la Tierra y los planetas del mismo material?





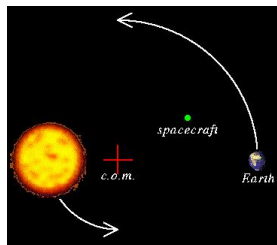
- La nave ha de estar recogiendo muestras de viento solar durante un tiempo suficiente (más de dos años).
- La órbita durante ese tiempo ha de ser lo más estacionaria posible, con unos colectores en la dirección del Sol.
- Las muestras recogidas han de regresar a la Tierra, sin que se contaminen.
- Las órbitas de tránsito (de ida y vuelta) y la órbita de aparcamiento, han de ser eficientes desde el punto de vista energético.

- Usar las fuerzas gravitatorias de la Tierra y el Sol para que hagan casi todo el trabajo para desplazar la nave.
- Estudiar el correspondiente **modelo matemático** para descubrir las mejores opciones y diseñar la misión espacial.

# El modelo matemático del sistema Tierra-Sol-nave

Hipótesis simplificadoras: El problema restringido de tres cuerpos (RTBP)

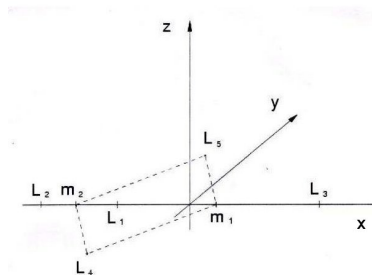
- La masa de la nave es tan pequeña comparada con las de la Tierra y el Sol, que éstos no se ven afectados.
- El Sol y la Tierra rotan alrededor del centro de masas común en **órbitas circulares**.
- El estudio del movimiento de una partícula de masa  $m$  negligible bajo la acción de dos masas  $m_1$  y  $m_2$  (primarias) que se mueven en órbitas circulares alrededor del centro de masas común se conoce como el **Problema restringido de tres cuerpos (RTBP)**.



# El modelo matemático del sistema Tierra-Sol-nave

El sistema de referencia sinódico

- Se toma un sistema de referencia **no inercial**, con origen en el centro de gravedad de las masas primarias y que gira con éstas.



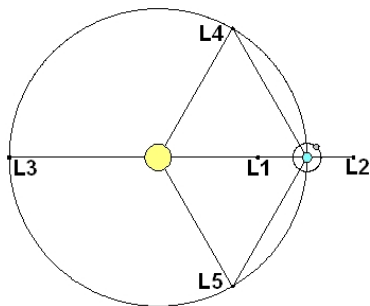
- En la Segunda Ley de Newton ( $F = ma$ ), consideramos:
  - las **fuerzas gravitatorias** que ejercen ambas masas primarias;
  - las fuerzas centrífuga y de Coriolis, que son **fuerzas ficticias**.

# El modelo matemático del sistema Tierra-Sol-nave

## Puntos de equilibrio

- Los puntos de equilibrio de un sistema son aquéllos en los que se anulan todas las fuerzas.
- Joseph-Louis Lagrange (1763-1813) demostró que el RTBP tiene 5 puntos de equilibrio (los **puntos de Lagrange**):

$L_1, L_2, L_3$  son **colineales** y  $L_4, L_5$  son **triangulares**.



- El punto  $L_1$  parece apropiado para nuestra misión, pues está situado relativamente cerca de la Tierra, y permite observación permanente del Sol.
- Problema: Si dejamos la nave en el punto  $L_1$ , no podremos mantener contacto con ella.

Pero, ¿qué pasa si dejamos la nave cerca de  $L_1$ ?

¡Hay que estudiar más!

El espacio de fase es 6D (espacio  $\times$  velocidad).

El movimiento de las seis variables que describen el movimiento de la nave cerca de  $L_1$  se descompone esencialmente en:

- dos pares de direcciones que se comportan como un muelle, y oscilan alrededor de  $L_1$ ;
- otro par de direcciones que se comportan como un péndulo invertido, y son inestables.

- Las órbitas Halo son órbitas periódicas centradas en  $L_1$ .
- Son perpendiculares al plano de la eclíptica.
- Como  $L_1$ , son inestables.
- Hay una familia de órbitas que navegan hacia la órbita halo, y forman una especie de tubo: la **variedad estable**.
- Hay una familia de órbitas que despegan desde la órbita halo, y forman una especie de tubo: la **variedad inestable**<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>halo\_tube\_color.mov



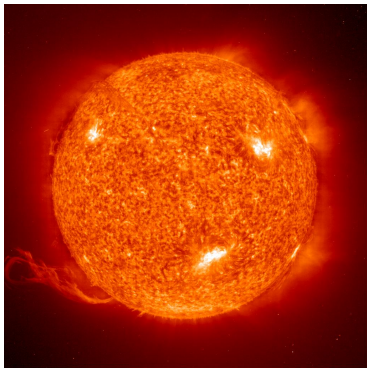
# El punto $L_1$ y sus órbitas halo

## Ventajas de las órbitas halo en $L_1$

- Permiten una observación permanente del Sol.
- Si el radio de la órbita es suficientemente grande, la transmisión de datos hacia la Tierra no tiene interferencias solares.
- El movimiento relativo *Sol* – *nave* es suave, siendo apropiado para helioseismología (estudio de tormentas solares, etc.).  
(misión SOHO)
- Está fuera de la magnetosfera terrestre, de modo que es apropiado para recoger partículas expulsadas por el Sol.  
(misión Génesis)

# El punto $L_1$ y sus órbitas halo

La misión SOHO (ESA & NASA)

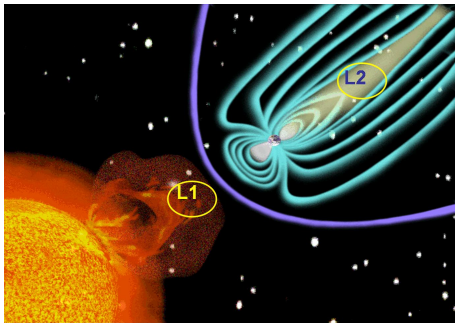


La SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) fue lanzada con un cohete Atlas Centauro en diciembre de 1995 y empezó a operar en marzo de 1996.

El 14 de septiembre de 1997, fotografió una erupción en la corona solar. La temperatura de los chorros es de entre 60,000 – 80,000 K, y la de la corona solar está sobre 1,000,000 K.

# El punto $L_1$ y sus órbitas halo

Más allá de la magnetosfera terrestre



El viento solar toma la forma de la magnetosfera terrestre, y se forman tormentas magnéticas al acercarse a la Tierra.

Las líneas blancas representan el viento solar y las azules la magnetosfera. La línea lila es el frente de choque.

# El punto $L_1$ y sus órbitas halo

## Ventajas de las variedades invariantes

- Las variedades invariantes (los tubos de llegada y salida de las órbitas halo) hacen de **autopistas espaciales**.
- Estos objetos geométricos se pueden **calcular** de forma muy precisa. Las técnicas fueron introducidas hacia el año 1985 por el **Grup de Sistemes Dinàmics** de Barcelona.
- El gasto energético es mínimo, porque es la Naturaleza quien hace el trabajo.

- Es importante el estudio geométrico del espacio de fase, para descubrir el esqueleto del mismo (posiciones de equilibrio, variedades invariantes, etc.)



- El estudio de los sistemas dinámicos desde un punto de vista geométrico fue iniciado por el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912).

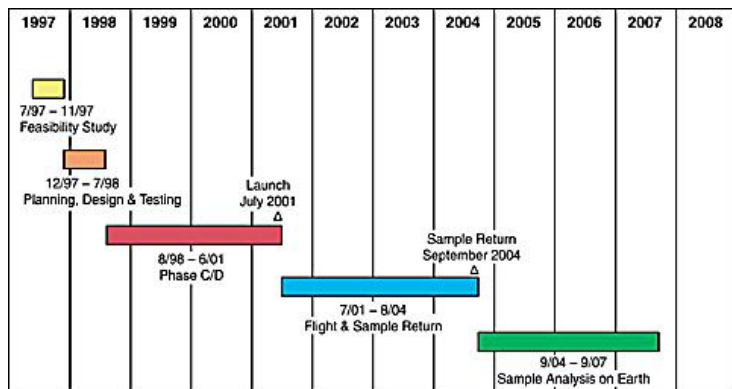
# La misión Génesis

## Descripción

- La nave se envía hacia una órbita halo del punto  $L_1$ , mediante la variedad estable.
- La órbita de aparcamiento está a unos 1,5 millones de km en la dirección del Sol, y es perpendicular al plano de la eclíptica.
- En esta órbita, la nave despliega unos colectores, y se toma un baño de sol por más de dos años.
- Después vuelve hacia la Tierra, tomando la variedad inestable, y después de una carambola con  $L_2$ , llega a la Tierra.
- La nave deja una pequeña cápsula con las muestras recogidas en su interior, y es recogida por un helicóptero.
- Los científicos tienen trabajo...

# La misión Génesis

## Programa



- Días de vuelo: 1127
- Días de muestreo: 884
- Distancia recorrida:  $\approx$  32 millones de km

# La misión Génesis

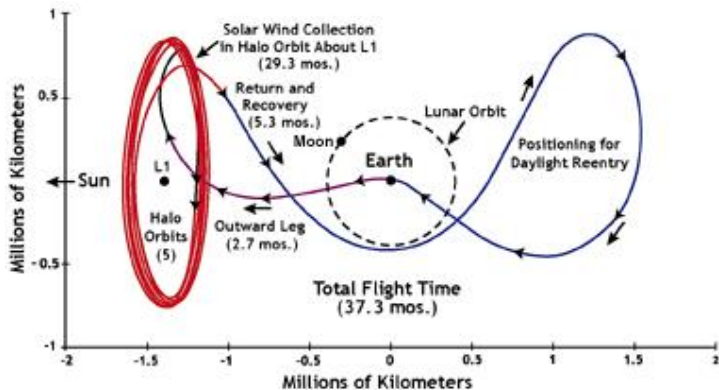
El despegue ...



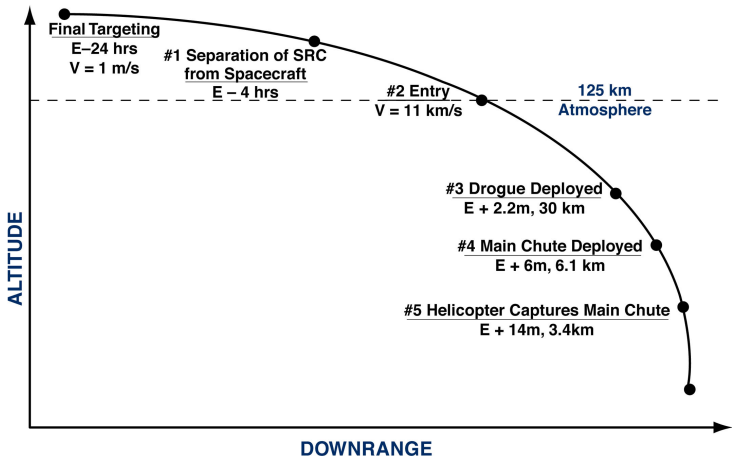


# La misión Génesis

El paseo ...



### SRC Recovery Profile



# La misión Génesis

El regreso: lo que pudo haber sido ...



Pruebas de recogida de la cápsula

# La misión Génesis

¡y no fue!



El “castaño”<sup>2</sup>

# La misión Génesis

... y después, ¿qué?

Afortunadamente, se pudo recuperar el cargamento, de

$\simeq 10^{20}$  iones  $\simeq 0,4$  miligramos.

Está siendo analizado por los científicos ...

**GENESIS SCIENCE TEAM 2006**



# Otras aplicaciones del RTBP

A la Astronomía y la Astrodinámica

- Alrededor de los puntos  $L_4$  y  $L_5$  del sistema Sol-Júpiter, que son estables, se han encontrado nubes de asteroides (que son llamados Troyanos y Griegos).
- Estaciones espaciales permanentes en los puntos  $L_4$  y  $L_5$  del sistema Tierra-Luna.
- Sonda en una órbita halo cerca del punto  $L_2$  del sistema Tierra-Luna, para estudiar la cara oculta de la Luna.
- El Sistema Solar se puede considerar como una composición de RTBPs, de modo que se pueden diseñar autopistas interplanetarias pegando unas variedades con otras.

# Otras aplicaciones del RTBP

Otras misiones en el RTBP Tierra-Sol

ISEE-3	(NASA)	L1	1978	Solar wind, cosmic rays
WIND	(NASA)	L1	1994	Solar wind, magneto-sphere
SOHO	(ESA-NASA)	L1	1996	Solar observatory
ACE	(NASA)	L1	1997	Solar wind, particles
MAP	(NASA)	L2	2001	Background cosmic radiation
GENESIS	(NASA)	L1-2	2001	Solar wind composition
WSO	(ESA)	L2	2006	Ultraviolet astronomy
FIRST/HERSCHEL	(ESA)	L2	2007	Infrared astronomy
PLANK	(ESA)	L2	2007	Cosmic microwave background
TRIANA	(NASA)	L1	2008	Earth observation
GAIA	(ESA)	L2	2012	Astrometry
NGST/JWST	(NASA)	L2	2011	Space telescope
Constellation X	(NASA)	L2	2013	X-ray astronomy
DARWIN	(ESA)	L2	2014	Planetary systems
TPF	(NASA)	L2	2015	Planetary systems
SAFIR	(NASA)	L2	2015	Infrared telescope

- El concepto de autopista interplanetaria <sup>3</sup> fue introducido por el ingeniero de la NASA Martin Lo.
- En las páginas de la NASA se puede leer

*Inspired by this pioneering work and research conducted by scientists at the University of Barcelona, Lo conceived the theory of the Interplanetary Superhighway.*

- Martin Lo aprendió las técnicas basadas en cálculo de variedades invariantes haciendo de “referee” de un artículo escrito por G. Gómez, À. Jorba, J. Masdemont y C. Simó (UB-UPC) para la revista *Celestial Mechanics*, en 1993.

---

<sup>3</sup>LunarGatewayServicing.avi



